

# تأليف

أ.د/ أحمد كامل الخولي

أ./ كمال يونس كبشة

## مراجعة وتعديل

د/ محمد محى الدين عبد السلام

أ.د/ شعبان إبراهيم أبو يوسف

أ/ شريف عاطف البرهامي

أ/ عثمان مصطفى عثمان

أ/ محمد على قاسم

ا/ أيماب فتحى زكى

د/ محمد عبد العاطي حجاج

أ/ جورج يوحنا ميخائيل

إشراف علمي (مستشار الرياضيات)

أ/ منال عزقول

إشراف تربوي (رئيس الادارة المركزية لتطوير المناهج)

د/ أكرم حسن

جميع الحقوق محفوظة لا يجور نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش-م-م

SAKKARA PIRLINING

الطبعــة الأولى ٢٠١٧/٢٠١٦ رقم الإيـــناع ٢٠١٦/٨٧٠١ الرقــم الدولى 5 - 929 - 706 - 977 - 978

#### بسم الته الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلي:

- ↑ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
  - ۲ تزوید المتعلم بما هو وظیفی من معلومات ومفاهیم وخطط لحل المشكلات.
  - تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
    - أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
    - ب ) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

- ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
- اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
- احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة. والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

طبعة 4 4 7 - 7 • 7 • 7 • 4 طبعة غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

# المحتويات

# الوحدة الأولى: الارتباط والانحدار 1-1 الارتباط ١ - ٢ الانحدار الوحدة الثانية: مقاييس متقدمة في الأحضاء 44 1-4 عرض وتمثيل البيانات باستخدام طريقة « الساق والأوراق». 7-7 45 الرباعيات وتمثيلها بيانيا. ٤٤ 4-4 نصف المدى الربيعي. الوحدة الثالثة: الاحتمال 1-4 حساب الاحتمال 7-4 الاحتمال الشرطى 4-4 الأحداث المستقلة

# المحتويات

\	الرابعة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية	الوحدة
۸٦	المتغير العشوائي المتقطع	۱ - ٤
94	التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي المتقطع	۲ - ٤
١٠٠	التوزيع الهندسي وتوزيع ذات الحدين	۲ - ٤
11.	دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل	٤ - ٤
	ل <b>نامسة:</b> التوزيع الطبيعى	لوحدة ا
114	التوزيع الطبيعى	1 - 0
144	بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى	۲ – ٥
۱۳۸	فترات الثقة	۳ - ٥

# الارتباط والانحدار

Correlation and Regression





#### مقدمة الوحدة

الإحصاء (Statistics) هو أحد فروع الرياضيات المهمة ذات التطبيقات المتعددة حيث تهتم بجمع وتمثيل البيانات واختزالها في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس ملامحها الأساسية وتحليلها؛ بغرض اتخاذ القرارات المناسبة لما لها من أعدة تعادة قالما وقد المدارات المناسبة لما لها

من أهمية تطبيقية واسعة في شتى مجالات العلوم الفيزيائية والإنسانية والاقتصادية والاجتماعية وغيرها.

وتهتم هذه الوحدة بتحليل البيانات ذات المتغيرين وبدراسة درجة واتجاه العلاقة بين المتغيرين وشكل هذه العلاقة، فتهتم في البداية بدراسة الارتباط (correlation) الذي يكشف عن درجة وقوة العلاقة بين متغيرين وقد تتخذ هذه العلاقة الشكل طرديًا أو عكسيًا، ومن الجدير بالذكر أن الارتباط بدرس العلاقة واتجاهها بين متغير وآخر، إلا انه يجب أن ندرك بأن هذه العلاقة لا تدل على السببية أو العلية، فهي لا تدل على وجود أثر لمتغير على آخر كما سيتضح من خلال الدرس الأول في هذه الوحدة، كما تتناول هذه الوحدة أيضا دراسة الاتحدار الخطى البسيط (Linear regression) الذي يهتم بتقدير شكل هذه العلاقة والذي يمكن من خلاله التنبؤ بقيمة المتغير التابع إذا علمنا قيمة المتغير المستقل، وتزداد دقته كلما كانت العينة مختارة بشكل عشوائي، وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض التقنيات الحديثة من آلات حاسبة علمية وبرامج وحصائية للحاسوب (مثل برنامج SPSS) في إجراء الحسابات والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بالارتباط والاتحدار الخطي بين ظاهرتين.

#### أهداف الوحدة



#### في نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- پتعرف معنى الارتباط بين متغيرين.
- تحسب معامل الارتباط بين متغيرين بطرق مختلفة (طريقة بيرسون طريقة سبيرمان) ويفسر معناها رياضيًّا.
- يفهم معنى خط الانحدار، ويقدر أهميته
   في دراسة العلاقة بين متغيرين.
- یمثل العلاقة بین متغیرین فی مستوی
   کارتیزی، ویحکم من خلالها علی وجود
   وقوة العلاقة.
- 🕸 يتعرف معنى معامل الانحدار الخطى

- يستخدم معادلة خط انحدار معطاة في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المناظرة للمتغير الآخر.
- بطبق الارتباط والانحدار الخطى فى مواقف بحثية.
- یقدر إسهامات استخدام الارتباط والانحدار الخطی فی حل مشكلات حیاتیة ومجتمعیة.
- ويفسر ما يمكن أن يستدل عليه بمعرفة قيمة هذا المعامل.
- ت يُوجِد معادلة خط الحدار أي من المتغيرين على الآخر بطريقة المربعات الصغرى.
- تستخدم الآلة الحاسبة والحاسوب في إجراء العمليات الحسابية والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بكل من الارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.



#### المصطلحات الأساسية

- 3 ارتباط عکسی ﴿ الارتباط Inverse Correlation 🗦 معامل ارتباط سبيرمان Correlation ÷ الانحدار 🗦 شكل الانتشار Spearman Correlation Coefficient Scatter diagram Regression
- Linear Correlation 3 معامل ارتباط بيرسون خط الانحدار 🗦 الارتباط الخطى Regression Line
- Pearson Correlation Coefficient 🗦 Pearson = معامل الارتباط Carrelation Coefficient Least Square
  - 🗦 ارتباط طردی Direct Correlation

#### دروس الوحدة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برنامج الإكسيل - برنامج spss

#### الدرس (۱ – ۱): الارتباط،

طريقة المربعات الصغرى

كتاب الإحصاء - أدبي

الدرس (۱ - ۲): الاتحدار،

### مخطط تنظيمي للوحدة الارتباط والانحدار الارتباط أنواع الارتباط معامل الارتباط شكل الانتشار منعدم طريقة طريقة عكسى ظردی سبيرصان بيرسون الانحدار شكل الانتشار خط الانحدار

معادلة خط الانحدار

# الارتباط

1 - 1

#### Correlation

	المصطلحات الأساسية		سوف تتعلم
Scatter diagram مشكل الانتشار عمامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient معامل ارتباط سبيرمان (الرتب)  spearman's coefficient correlation	Correlation الارتباط الخطي Linear Correlation الارتباط الحاص معامل الارتباط Correlation Coefficient  ارتباط طردي Direct Correlation مارتباط طردي Inverse Correlation	معامل الارتباط الخطى لبيرسون معامل ارتباط الرتب لسبيرمان	متعریف الارتباط مشکل الانتشار الارتباط الطردی والارتباط العکسی العکسی معامل الارتباط الخطی

#### مقدمة:

سبق أن درست فى الإحصاء كيفية وصف مجموعة من البيانات التى تمثل ظاهرة وذلك باستخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف، وفى هذا الدرس سوف تدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، بمعنى إذا تغير أحد المتغيرين فى اتجاه معين (بالزيادة أو النقصان) فإن المتغير الآخر يميل إلى التغير فى اتجاه معين أيضًا بالزيادة أو النقصان، و يُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا طرديًّا، و إذا تغير أحد المتغيرين نحو الزيادة اتجه الآخر نحو النقصان، والعكس صحيحًا و يُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا عكسيًّا.

#### الارتباط:



تأمل الأمثلة الآتية ودون ملاحظاتك عليها:

- ١- العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته.
- ٢- العلاقة بين الإصابة بضغط الدم والعمر.
- ٣- زيادة سعر الوحدة من سلعة ما ومدى الطلب على شرائها.
- انخفاض درجة الحرارة ومدى الطلب على استهلاك الوقود.
- العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر وارتفاع درجة الحرارة .

#### نلاحظ من الأمثلة السابقة أن:

المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه، أى إن زيادة أو نقصان أحدهما يؤدى إلى زيادة أو نقصان الآخر كما في الأمثلة ١، ٢، ٢ ويقال إن الارتباط بينهما موجب (طردي).

الأبوات المستخدمة ٥ آلة حاسبة علمية.

الدحظ في المثالين (٤)، (٥) أن المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه مُعاكِس، فالزيادة أو النقصان في أحدهما
 تؤدي إلى نقصان أو زيادة في الآخر، عندئذ يقال إن الارتباط بينهما سالب (عكسي).

ريف الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

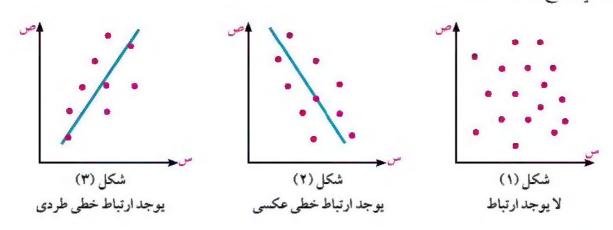
والعلاقة بين متغيرين تتراوح من الدرجة القوية إلى الدرجة الضعيفة، فعندما تكون العلاقة قوية فإن ذلك يعنى أن معرفة قيمة أحد المتغيرين يساعد في التنبؤ بقيمة المتغير الآخر، وعندما تكون العلاقة ضعيفة فإن ذلك يعنى أن معرفة أحد المتغيرين لا يساعد في التنبؤ بقيمة المتغير الآخر.

أن إحدى الطرق المهمة التي تساعدنا على التعرف على درجة العلاقة ونوعها بين متغيرين هي تحديد شكل الانتشار.

شكل الانتشار: Scatter diagram

شكل الانتشار هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين.

إذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز (س) والظاهرة الثانية بالرمز (ص) فإن الأشكال التالية توضح العلاقة بين س، ص. والتي توضح شكل الانتشار



الارتباط الخطي: Linear Correlation

يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين.



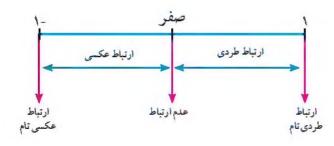
ارسم شكل الانتشار لكل من البيانات الآتية ثم اذكر نوع العلاقة التي تعبر عن تلك البيانات.

10	11	٨	٧	٤	٣	w	•	11	11	١-	٩	٨	٧	س ص	
17	W	14	7.	77	77	ص	· ·	44	11	١٨	17	12	14	ص	

Correlation Coefficient معامل الارتباط

معامل الارتباط يرمز له بالرمز  $(\sim)$  وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث  $-1 < \sim < 1$ ، ويقال إن الارتباط طردى تام إذا كان معامل الارتباط  $\sim = 1$ ، ويقال إن الارتباط عكسى تام إذا كان معامل الارتباط  $\sim = -1$ ، وينعدم الارتباط عندما  $\sim = -1$ 

#### ونلاحظ أن:



كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد ١ كان الارتباط الطردى بين المتغيرين قويًا، وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردى ضعيفًا، وينطبق نفس القول على الارتباط العكسى. والشكل المجاور يوضح ذلك.

تعبير شفها اختيار من متعدد:

معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو:

·, v • ·, £ ? ·, o - (+)

Pearson Correlation coefficient

#### معامل ارتباط بيرسون

نفرض لدينا مجموعة مكونة من (ن) فردًا وحصلنا من هؤلاء الأفراد على بيانات عن قيم متغيرين س، ص فتكون البيانات أن التي لدينا على الصورة:

قيمة المتغير الأول س: س٠، س٠، س٠، س٠، س٠ن

قيمة المتغير الثاني ص: ص، ص، ص، ص، .....، صن

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز (م)، فان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص أو معامل الارتباط الخطى يمكن إيجاده من العلاقة:

$$\sqrt{\sum_{i} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum$$

حيث: "3" رمز التجميع وتقرأ مجموع.

ن ترمز الى عدد المفردات،

**ک** س = س + س + س + س = س ع

 $\Sigma - 0 = 0$ , + 0, + 0, + 0

Z m o = m, o, + m, o, + m, o, + m, o, .... + mi oi

 $\Sigma_{m}^{7} = \omega_{1}^{7} + \omega_{2}^{7} + \omega_{1}^{7} + \omega_{1}^{7} + \omega_{1}^{7}$ 

 $\Sigma_{\infty} + \dots + \omega_{+} + \omega_{+} + \omega_{+} + \omega_{+} = \Sigma_{\infty}$ 

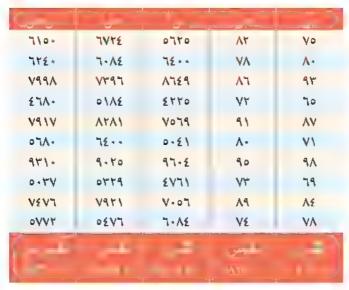
١ الجدول التالي يبين الدرجات التي حصل عليها عشرة طلاب في مادتي التاريخ والجغرافيا:

٧٨	٨٤	79	٩٨	۷۱	۸۷	70	94	۸۰	٧٥	
٧٤	۸۹	٧٣	90	۸-	41	٧٢	۸٦	VA	۸۲	ا الجغرافيا بي

والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص وتحديد نوع الارتباط.

🔷 الحل

نُكوِّن الجدول التالي:



$$\frac{\mathsf{i}\,\Sigma_{\mathsf{m}}\,\mathsf{o}_{\mathsf{m}}\,(\Sigma_{\mathsf{m}}\times\Sigma_{\mathsf{m}})}{\sqrt{\mathsf{i}\,\Sigma_{\mathsf{m}}^{\mathsf{T}}\,(\Sigma_{\mathsf{m}})^{\mathsf{T}}\,\sqrt{\mathsf{i}\,\Sigma_{\mathsf{m}}^{\mathsf{T}}\,(\Sigma_{\mathsf{m}})^{\mathsf{T}}}}}.$$

#### 🚹 حاول أن تحل

من بيانات الجدول الآتى:

٣.	۲۸	70	45	44	r.
۲۸	49	77	۳.	41	T. (a)

احسب معامل ارتباط بيرسون "الخطى" بين س، ص وحدد نوعه.

#### استخدام الآلة الحاسبة العلمية:

تدعم الكثير من الآلات الحاسبة العلمية الموجودة بالأسواق إيجاد نواتج الأعمدة الموجودة في الجدول السابق وحساب معامل الارتباط كالآتي:

#### تهيئة الآلة الحاسبة لنظام الإحصاء:

وذلك بالضغط على: MODE ثم 3

Statistical and regress on calculations (STA)

نختار من القائمة المنسدلة:

Paired-variable (X, Y), I near regression (y = A + By) 2(A+BX)

#### ادخال البيانات:

نملاً الجدول المبين بالشكل لجميع قيم (٢، x) وذلك بكتابة العدد الموجود في جدول = وبعد الانتهاء من كتابة جميع قيم (٢، x)





نضغط على المفاتيح: (STAT) 1 (STAT) فتعطى منها: 3:sum

ونختار من هذه القائمة كلَّا من:

 $5: \mathbf{\Sigma} xy$  c  $4: \mathbf{\Sigma} y$  c  $3: \mathbf{\Sigma} y^2$  c  $2: \mathbf{\Sigma} x$  c  $1: \mathbf{\Sigma} x^2$ 

وذلك بالضغط على المفاتيح من ١ إلى ٥ كل على حدة.

### لإيجاد معامل الارتباط (س) نضغط المفاتيح التالية:

(STAT) ومن القائمة المنسدلة نضغط: 5: Reg

ومن القائمة المنسدلة نضغط: r: 3 فيعطى ناتج معامل الارتباط المطلوب بين المتغيرين x،y



استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة حل المثال السابق.

#### برنامج SPSS الأحصائي

برنامج (spss) هو اختصار (Statistical package for social sciences) وهو ما يعني الحزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية ، و برنامج spss هو عبارة عن مجموعة من الحزم أو بيانات حسابية شاملة للقيام بتحليل هذه البيانات ، و يتم استخدام هذا البرنامج في الأبحاث العلمية التي تحتوي على بيانات رقمية .

يستطيع البرنامج القيام بقراءة كافة البيانات من كافة أنواع الملفات وتحليلها واستخراج النتائج والتقرير الإحصائية، والبرنامج يتيح للمستخدم تحرير البيانات وتعديلها في شكل متغيرات وبيانات جديدة باستخدام معادلة، وكذلك حفظ البيانات في ملفات وتسميتها أو تعديل أسماء ملفات البيانات، أو استرجاع البيانات والملفات والمشاهدات،

وذلك من خلال التحكم في قائمة من الأوامر والخيارات المتاحة في البرنامج . لتشمل كافة مراحل تحليل البيانات والعملية الإحصائية من خلال أربع خطوات هي :

١ - ترميز البيانات . ٢ - وضع البيانات في البرنامج .

٣ - انتقاء الشكل المناسب واختبار البيانات وتحليلها.

تحديد البيانات المتغيرة المراد تحليلها وتحقيق عملية الإحصاء.

#### تشغیل برنامج spss :

يتم فتح وتشغيل برنامج spss عن طريق الضغط على نافذة ابدأ (Start) الموجودة في القائمة الرئيسية ، ثم نقم بالذهاب الى قائمة البرامج (Program) ، والبحث عن برنامج spss ونضغط علي مرتين ليفتح البرنامج

#### مكونات البرنامج ووظائفها:

#### لائحة الأوامر (Sntiocnd Funammoc):

وهو عبارة عن شريط الأوامر الخاصة بعمل البرنامج ، حيث يمكن للمستخدم اختيار الامر الذي يريده عن طريق الضغط على ايقونة كل أمر احصائي وبالتالي تعرض لنتيجة في لائحة التقارير ، ولائحة الأوامر تشمل عدد تسع أوامر رئيسية والتي عند الضغط عليها يتفرع منها عدد من الأوامر فرعية ، بخلاف ايقونة مساعدة (Help).

### بيئة عرض البيانات (Data View):

هي عبارة عن بيئة يقوم المستخدم بالتحكم في إضافة البيانات التابعة لكل متغير أو إلغاثها ، حيث يقوم المستخدم بإيداع أي متغير مستقل في عمود (Column) على شاشة البيانات. حيث يستطيع المستخدم التحويل لعرض ومشاهدة المتغيرات عن طريق الضغط والتنقل بين الامرين (DataView) و (Variable View) ، الموجودين اسفل يسار شاشة المتغيرات.

#### شاشة المتغيرات:

شاشة تعريف البيانات المتغيرة ، والتي تحتوي على أعمدة متوازية ، حيث يحتوي كلم عمود (column) على البيانات الخاصة بكل متغير ، ولعرض تعريف كل متغير ، يقوم لمستخدم بالضغط بزر الماوس مرتين (Double Click) ، أو يمكنه الضغط على الأمر (Variable View) الموجود أسفل يسار شاشة التعريفات ، وعندها يتغير شكل الشاشة و يظهر شريط عناوين :

 Type
 النوع
 Name

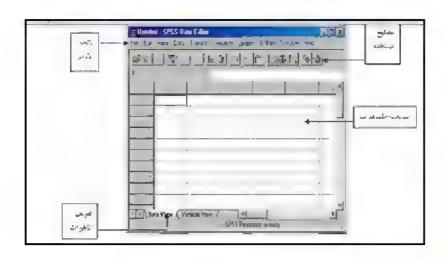
 Values
 - الترميز
 Width

وعند الضغط عليه يظهر الترميز ، ومن ثم نضغط على زر (Add) لعرض قيمة الرمز والوضع .

#### خطوات يمكن للمستخدم التحكم فيها:

- (۱) إمكانية استرجاع البيانات السابقة: يمكن التحكم في استرجاع البيانات والملفات عن طريق الضغط على زر ملف (File) ثم الضغط على الأمر فتح (Open) ثم يقوم المستخدم باختيار الملف الذي يحتوي على البيانات المراد استرجاعها والتي تشمل التقارير الإحصائية التي تم عملها مسبقا ثم الضغط على حفظ (Save).
- (٢) حفظ المتغيرات الجديد في ملف: يمكن للمستخدم حفظ المتغيرات في ملف. عن طرق الضغط على الامر (Save) أو الامر (Save as) ليتم الحفظ و إعطاء لملف الجديد الاسم الذي يختاره.

- (٣) إضافة التعديلات وإدارة المتغيرات: يقوم المستخدم الذهاب الى نافذة محرر البيانات (Data Editor) واضافة البيانات التي يريدها ، حيث يستطيع:
  - تعديل قيمة البيانات.
  - 🖊 تعريف المتغيرات ، من تحديد نوعية البيانات التي تم إضافتها. والمؤشرات الاقتصادية وكافة المتغيرات.
- (٤) يستطيع المستخدم إضافة متغير جديد، وعرض ومشاهدة ترتيب المشاهدات التي حدثت عن طريق استخدام الأمر الرئيسي (Data) ثم اتباع كل تغير يريد من إضافة متغير أو اضافة مشاهدة جديدة أو تعديل ترتيب البيانات.
- (٥) تكوين متغير جديد كليا عن طريق استخدام معادلة . حيث يذهب الى القائمة الرئيسية (Transform) ، ثم الانتقال الى المربع الجانبي (Compute) و بعد ذلك يقوم بتحديد اسم المتغير الجديد في قائمة (Targer Variable)
  - (٦) إمكانية إلَّغاء أي متغير أو إلغاء مشاهدة .
- (٧) ترتيب المشاهدات، حيث يقوم البرنامج بإنشاء متغير جديد يحتوي على رقم تسلسلي ليتم ترتيب المشاهدات تصاعديا أو تنازليا.
  - (٨) إجراء عملية إحصاء وتحديد الوصف الإحصائي وتدرجه وتكرار البيانات.
- (٩) إمكانية عمل تمثيل للمتغيرات من خلال إنشاء رسم بياني، لعرض تحليل المتغيرات وتفسير ما تم في المتغيرات الجديدة.



### نشاط



استخدم الشبكة العنكبوتية في تحميل برنامج (SPSS) من الموقع :http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss/ ثم تحقق من صحة حل المثال السابق.

## مثال 🚮

- 💎 أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كان:
  - T س ص ۳٤۸
- **ت** ص = ۲۶
- Σ س ۸۲

- ن − ۸
- ∑ص۲۰۶ ۲۰۶
- 24. July 2

🔷 الحل

$$\frac{\text{i} \Sigma_{\text{m}} \text{on} (\Sigma_{\text{m}} \times \Sigma_{\text{o}})}{\sqrt{\text{i} \Sigma_{\text{m}}^{7} (\Sigma_{\text{m}})^{7}} \sqrt{\text{i} \Sigma_{\text{o}}^{7} (\Sigma_{\text{o}})^{7}}}$$

قيمة معامل الارتباط (+ ١) تعنى أن هذه العلاقة طردية تامة بين المتغيرين س، ص.

#### 👇 حاول أن تحل

💎 أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كان:

∑ س۲ ۱۱۰۰۰

Z w. 78

Spearman's Rank Correltion Coefficient

### معامل ارتباط سبیرمان (الرتب)



قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقديرات مادتين دراستين لسبع طلاب ودوَّن النتائج في الجدول التالي :

جيدجدًا	ممتاز	ضعيف	جيد	ضعيف	مقبول	ضعيف	
مقبول	جيدجدًا	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	

فإذا أراد هذا الإحصائي أن يقف على مدى العلاقة بين هاتين المادتين و إيجاد معامل للارتباط بينهما فهل يمكنك مساعدته في ذلك؟

لا نستطيع استخدام معامل ارتباط بيرسون في بند فكرد لاقش لأنه يعتمد على البيانات الكمية (العددية) فقط، ولكن في حالة البيانات الوصفية (كما في البند السابق) فإنه يمكن استخدام معامل ارتباط آخر يعرف بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يعطى مقياسًا للارتباط في كل من البيانات الكمية والوصفية التي لها صفة الترتيب كما في البند السابق، و يعتمد هذا المعامل على ترتيب قيم المتغيرات مع الأخذ في الاعتبار الترتيب التصاعدي أو التنازلي ثم نستخدم العلاقة الآتية:

حيث ف هي الفرق بين ربب المتغيرين س، ص، ن هي عدد قيم كل من المتغيرين.

# لاحظاد ال

- سيرمان ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواءً كانت البيانات كمية أو وصفية، بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط
- لارتباط الرتب بسهولته حتى لو كانت البيانات غير مرتبة ويؤخذ على معامل سبيرمان إهماله لفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالى فهو أقل دقة.

🗭 يتميز معامل سبيرمان

# مثال 🚮

😙 أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان في بند فكر وناقش السابق وحدد نوعه .

🔷 الحل

فى هذا المثال نرتب الظاهرتين ترتيبًا تصاعديًّا منتظمًا وذلك بأن تعطى كل طالب رتبة تقدير لمادة، وكذلك المادة الثانية للطالب نفسه كما في الجدول الآتي:

جيد جدًا	ممتاز		جيد		مقبول	ضعيف	
٦	٧	٣	٥		٤	١	
٦	٧	۲	p-	۲	£	۴	

نلاحظ أن الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ١، ٢، ٣

٢ (وهو الوسط الحسابي للأعداد ١، ٢، ٣) و بالمثل:

لذلك تكون رتبة كل منها المسلم المسلم المسلم

مقبول	جيدجدًا	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	(SIN)
۵	٧	٣	٤	٦	٣	1	الترابيع مع التكرا
٤	٧	١,٥	٤	٦	٤	١,٥	

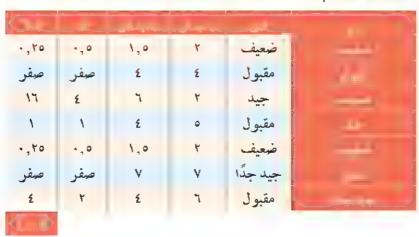
نلاحظ أن المستوى (ضعيف) تكرر مرتين وشغل الأماكن ١، ٢

(وهو الوسط الحسابي للعددين ١، ٢)

لذلك تكون رتبة كل منها المبال المبال منها المبال المبال المبال المبال المبال المبال المبال المبال المبال المبال

كذلك المستوى (مقبول) تكرر ثلاث مرات وشغل الأماكن ٣،٤،٥

لذلك تكون رتبة كل منها على المنها على المنها على المحدول الآتى:



۱ - ۱۲۹ - ۱۳۱۰ - ۱۳۹۰ وهو ارتباط طردی

#### 🚹 حاول أن تحل

ت في دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات وجد أن تقديرات ستة طلاب في المادتين كالتالي:

مقبول	مقبول	جيد جدًّا	ممتاز	جيد جدًّا	مقبول	
ضعيف	جيد	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	جيد	

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات وحدد نوعه.



٤ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وذلك من بيانات الجدول التالي:

#### 🔷 الحل

نكون الجدول الآتي:



$$\frac{r \Sigma \dot{\omega}^{\gamma}}{\dot{\omega}^{(i'1)}}$$
 :  $\frac{r \times 6, 17}{r \cdot (r \pi \ 1)}$   $\frac{r \times 7, 6 \times 7}{r \cdot (r \pi \ 1)}$   $\frac{r \times 7, 7}{r \cdot (r \pi \ 1)}$ 

يضكيو ناقدة هل يختلف ل ف إذا رتبنا الظاهرتين س، ص ترتيبًا تصاعديًّا الفسر إجابتك

#### 🚹 حاول ان تحل

٤ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه وذلك من بيانات الجدول التالي:

í	٦	٧	۸	٧	1-	
١٠	٩	٩	٧	٨	0	لاس

# تماریـن ۱ – ۱

ج ه. ٠

., V = (?)

., 14 (7)

11 12

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

- (١) معامل الارتباط الأقوى فيما يلي هو :
- ب صفر .,98
- أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو:
- ب ه. ., (1)
- 🔻 شكل الانتشار الذي يمثل ارتباط عكسي هو:
- - (٤) أضعف معامل ارتباط فيما يلي هو:

(ب) ۷٫۰

- (٥) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل أقوى معامل ارتباط عكسى بين متغيرين:
  - ٠,٣ 🕕 1,1. ٠,٩ (٢)
    - ٦ من بيانات الجدول الآتي:

1.4- (1)

أولًا: احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص ثانيًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س، ص

- ٧ من بيانات الجدول الآتي:

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

- (A) من يبانات الجدول الآتي:

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص مبينًا نوعه.

- (٩) من بيانات الجدول الآتي:

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص وحدد نوعه .

٠,٨٥ ٥

-, N = (3)

ره ۹,۰

.,90 (3)

		من بيانات الجدول الآتي:	•
Λ Ψ <b>ξ</b> Λ Λ	٥ ٤	v v	
.a	مان بين س، ص وحدد نوع	احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرا	i
		من بيانات الجدول الآتي:	· (1)
ضعيف مقبول جيد جدًّا ممتاز جيد جدًّا مقبول	مقبول جيد	جيد جدًا جيد حسب معامل ارتباط الرتب لسبيره	
مه بذر کران			
مه إدا كان: مجـ س ص∥ ٢٦٥٨	مىغىرىن س، ص وحدد بور مجـ ص ال ١٤٠	أوجد معامل ارتباط بيرسون بين اله مجـ س - ۲۲	
ن ۱۰	مجـص۲ ۲۲۹۲	مجسا - ٤٨٦٥	
من ٦ كتب طبقًا لسعرها (س) وحجم المبيعات		الريط بالتجارق الجدول الآ	(ص)
منخفض متوسط منخفض	منخفض جدًّا متوسط مرتفع مرتفع جدًّا مان بين سعر الكتاب وحج		
			_
اقة بين إنفاقها على الدعاية س (بالألف جنيه) لشركة الثمانية كانت كالآتي:		الريط بالدعايع، ارادت إحم م مبيعاتها ص (بالألف وحدة). فإذ	
	E 1. V 1	1A 19	
	,		_
Vo 90 V· A· 0·	70 9. 00		
	رسون وحدد وقعه .	الحبيب معامل الأربباط العظي لبير	
لأم وعدد أطفالها. جاءت البيانات كما يلي :	لتحديد العلاقة بين عمر اا	الربط بالمواليد: في دراسة	
70 77 79 0 7 5 7	۲ ۱	۲۰ ۱۸ ۲ تا احسب معامل ارتباط الرتب لسبيره	

# الانحدال

7 - 1

#### Regression

🗗 المربعات الصغرى Least Square

• الدالة هي علاقة بين

عناصر صد.

مجموعتين س، ص.

بحيث يكون لكل عنصر من

عناصر سے عنصر وحید من

تتحدد الدالة متى عُلم كل

من: المجال - المجال

المقابل - قاعدة الدالة

اساسية	المصطلحات الا		سوف تتعلم
ession	4الانحدار	م طريقة المربعات الصغري	هتعريف الانحدار
ession Line	خط الانحدار	٥ أنشطة على إيجاد معادلة خط	اثواع الاتحدار
		الاتحدار .	معادلة خط الانحدار

### Sur (Q)

No Relationship

سبق أن درست الدالة، وتعرفت الشكل البيانى لها، كما تعرفت فى الدرس السابق شكل الانتشار، وعلمت أن الهدف من رسمه هو تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين سه، صه من خلال البيانات المتعلقة بهما كما علمت أن خصائص الارتباط بين ظاهرتين يمكن أن تأخذ إحدى الصور الآتية:

علاقة خطية علاقة خطية

علاقة خطية عكسية Negative Linear Relationsh p

الاقة غير خطية Non-Linear Relationship

وفى هذا الدرس سوف ندرس كيفية تحديد معادلة خط الانحدار Equation of Regression Line والهدف من هذه الدراسة هو مساعدة الباحث على معرفة نوع البيانات المعطاة و إجراء تنبؤات صحيحة من خلالها.

# قريف الانحدار هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

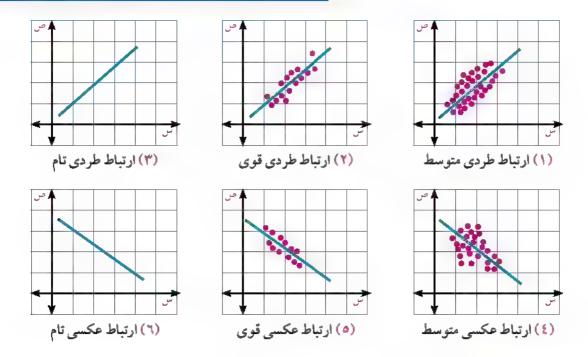
#### وله عدة أنواع:

لا توجد علاقة

- أ الانحدار الخطى البسيط: ويعتمد فيه المتغير التابع (ص) على متغير واحد (س) من خلال علاقة خطية.
  - الانحدار المتعدد: ويعتمد فيه المتغير التابع (ص) على أكثر من متغير مستقل.
- أَجُ الانحدار غير الخطى: إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع (ص) والمتغيرات المستقلة غير خطية (من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أسية أو لوغاريتمية أو .....)

وسنقتصر في هذا الدرس على الانحدار الخطى البسيط فقط. والأشكال التالية توضح العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع النقاط على خط الانحدار. وكلما اقتربت النقاط من الانطباق على هذا الخط زادت أو نقصت قيمة (س) الى أن تصل إلى انطباق جميع النقاط على الخط وفي هذه الحالة تكون قيمة (س) إما (+ ١) أو ( ١).

الأدوات المستخدمة مآلة حاسبة علمية. برنامج SPSS للحاسوب. برنامج: Microsoft Exceel.



**Equation of Regression Line** 

#### معادلة خط الانحدار

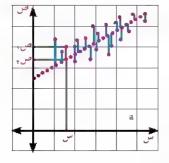
طريقة المربعات الصغرى؛

سبق أن درسنا في الهندسة التحليلية معادلة الخط المستقيم الذي ميله م و يقطع جزءًا من محور الصادات مقداره جـ وهي : ص = م س + ج.

و بالعودة إلى أشكال الانتشار الموضحة سابقًا نجد أنه إذا بدا شكل الانتشار كما في أي من الشكلين (٢) أو (٥) فإن هذا يشير بصفة مبدئية بأن العلاقة بين المتغيرين خطية؛ لأننا نستطيع أن نتصور وجود خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه و إن كانت لا تقع جميعها عليه، أما إذا بدا شكل الانتشار كما في أي من الشكلين (١) أو (٤) فإننا نشك في خطية العلاقة بين المتغيرين. ولذا فإن مهمتنا الأساسية هي استخدام أز واج القيم (سر، ، صر) المشاهدة لإيجاد أفضل خط مستقيم يلائم مجموعة نقط العينة ولتكن معادلته هي:

#### ص ا+بس

والطريقة الأكثر شيوعًا لإيجاد أفضل قيم لـ أ ، ب تسمى طريقة المربعات الصغرى.



#### Least Square Method

علمنا مما سبق أنه في حالة الارتباط ليس بالضرورة أن تقع جميع النقاط على خط الانحدار ، لذلك يكون هناك نسبة خطأ للنقاط التي لا تقع على خط الانحدار وللحصول على أفضل خط الانحدار يجب تقليل الانحرافات لأصغر قيمة ممكنة (خط الانحدار المناسب يمر أو يقترب بأكبر عدد من نقاط الانتشار) فإذا كان (س، ص) هي إحدى النقط الحقيقية للبيانات وكانت (س،  $\hat{w}$ ) هي النقطة الواقعة على خط الانحدار ( $\hat{w}$  تقرأ ص هات) فإن خط الانحدار المناسب عندما يكون  $|\hat{w}|$  من اقل مايمكن لجميع قيم س أو عندما  $|\hat{x}|$   $|\hat{w}|$  اقل مايمكن وبفرض معادلة خط الانحدار هي  $|\hat{w}|$   $|\hat{x}|$   $|\hat{x}|$ 

الفرق المطلق [ ( أ + ب س ) ص ا

والمطلوب تعيين قيمتي أ ، ب بحيث يكون الفرق المطلق اقل ما يمكن وذلك بحل المعادلتين الآتيتين:

حيث من المعادلة (١) 
$$\frac{\Sigma_{\infty} + \Sigma_{\infty}}{\dot{c}}$$
 وبالتعويض في (٢)

 $\frac{(\Sigma_m - (\Sigma_m)(\Sigma_m))}{(\Sigma_m)^7}$  تسمى بمعامل انحدار صعلى سوهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

#### وتستخدم معادلة خط انحدار ص على س في:

1- التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٢- تحديد مقدار الخطأ الذي يتحدد من العلاقة:

#### مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

ملاحظتين عند استخدام معادلة الانحدار في التنبؤ (التقدير) يفضل ألا نتجاوز كثيرًا مدى المتغير س المستخدم في حساب معادلة الانحدار.

يَضْكِيدِ ناقد: قيمة معامل الانحدار تدل على الارتباط. فسر هذه العبارة.



١ الجدول التالي يمثل إنتاج أحد المحاصيل الصيفية (ص) من المساحة المنزرعة (س) بالفدان :

				V£,0						
۱۸,۷	79,8	۳۳, ٥	۲۰۰,٦	42.,0	٣٥٦	۲	٤٠٠	9	12.	

أولًا: أوجد معادلة خط الانحدار.

ثانيًا: تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلوجرام إذا كانت المساحة المزروعة تساوى ١٠٠ فدان.

ثالثًا: أوجد مقدار الخطأ في الإنتاج إذا علمت أن المساحة المزروعة ١٢٠ فدانًا.

🔷 الحل

الحل باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

#### ١- إدخال البيانات:

نتبع نفس الطريقة السابق شرحها في مثال (١) في الدرس السابق (الارتباط) لإدخال البيانات.

#### ٢- استدعاء النواتج:

نضغط على المفاتيح التالية:

نستخدم المفاتيح التالية لإيجاد نواتج العمليات الآتية : (STAT) 1 (SHIFT)

نختار من القائمة المنسدلة : sum : 3 ونضغط على المفتاح 📵

تظهر لنا قائمة أخرى جديدة من ١ إلى ٨ (مجاميع النواتج) نختار منها الآتي :

Y: EX VET,T

£ : ΣΥ Υ٢09, 1

1: Σx<sup>r</sup> Λ9 - 1V, 19

0: ΣΧΥ ΥΟΣΕΛ9, \Λ

أولًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

نحسب قيمة الثابت أمن العلاقة: أ ص ب س

1. 1 10, 40 ~ VE, TT x T, 07TV TTO, 91 1:

#### مالاحظت:

يمكن حساب الثابت أ مباشرة كالآتى:

ن معادلة خط الانحدار هي : ص ٢,0٦٤ س + ٣٥,٣٥ -

ثانيًا: من معادلة خط الانحدار: ش - أ + ب س

يمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

ثالثا: لإيجاد مقدار الخطأ في الإنتاج إذا علمت أن س ١٢٠ فدانًا

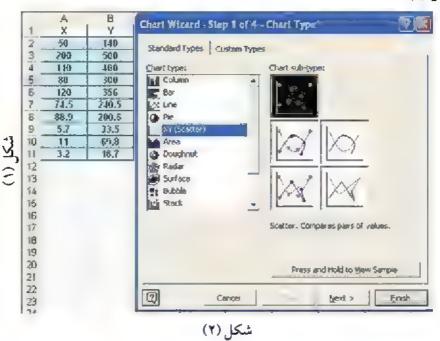
### نشاط 💮

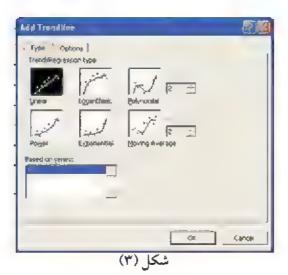
ولا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج (Microsoft Excel)

ثانيًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج الإحصاء (spss)

### أولًا ؛ استخدام برنامج Microsoft Exceel

- افتح برنامج Microsoft Exceel وأدخل البيانات السابقة في خلايا العمودين (B) ، (A) ، (C) تحت اسم (Y) ، (X)
   کمتغيرين حقيقيين أو الاسم الحقيقي لتلك البيانات كما هو موضح في شكل (I) .
- ۲- من شريط الأدوات نضغط على Chart Type فنحصل على Chart Type ثم من القائمة XY Scatter نضغط على Finish.
  کما في شكل (۲).



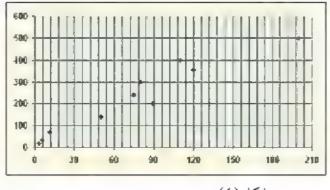


٣- يبين شكل (٣) التمثيل البياني للنقاط المدرجة في الجدول والذي يسمى شكل الانتشار. نختار منها الشكل المظلل باللون الأسود. والذي يظهر هنا بعد إجراء تغير في الخلفية كما مبين بالشكل.

القيم على المحور الأفقي تمثل قيم x للبيانات والمحور الرأسي للقيم y ونحن هنا بصدد إيجاد معادلة خط انحدار y على x والتى تأخذ الصورة الآتية:

 $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{X}$ 

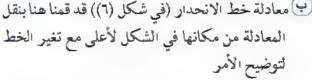
٥- بزر الفأرة الأيمن نضغط على إحدى النقاط (في الشكل (٤)) فتظهر القائمة المبينة بالشكل حيث نختار منها ِAdd Trendline و بالنقر عليها بالفأرة نحصل على الشكل التالي الذي يظهر ستة أشكال من الانتشار، قمنا باختيار الأول منها كما مبين بالتظليل باللون الأسود كخيار مقبول: لكوننا نريد الخط المستقيم ومن ثم من Options لتحديد المطلوب وذلك بالنقر عليها بالفأرة حيث يظهر صندوق الحوار الآتي:



<u> ÇIIIIIIIIIIII</u> Source Date ... Add Tgendine 150

شكل (٤)

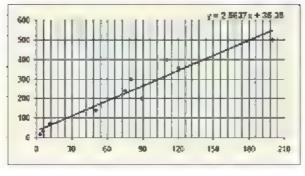
- 🕇 نعلم علی Display equation on chart کما هو مبین بالشكل (٥)
  - ٧ نضغط على ٥٨ للحصول على المطلوب وهو:
- الشكل المبين فيه خط الانحدار متوسط النقاط الممثلة لأزواج البيانات.
- 💬 معادلة خط الانحدار (في شكل (٦)) قد قمنا هنا بنقل المعادلة من مكانها في الشكل لأعلى مع تغير الخط



والشكل التالى هو نتاج العملية والذي يبين لنا المطلوب وخاصة المعادلة الآتية:

35.35 +2.5637x Y

وهي معادلة خط الانحدار وهي نفس المعادلة التي وجدناها في الحل السابق.

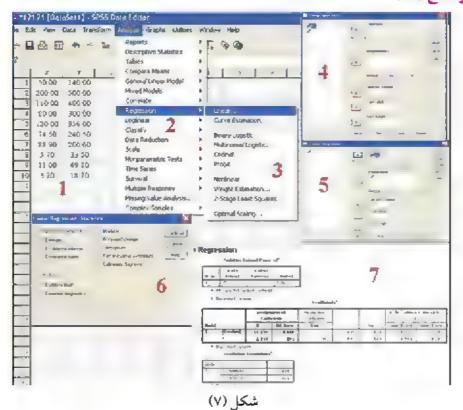


شکل (٦)



شكل (٥)

#### استخدام برنامج SPSS





الربط بالتعدين بين الجدول التالى بيانات عن متوسط سعر برميل البترول ومعدلات النمو الاقتصادي في إحدى الدول خلال ثماني سنوات والمطلوب إيجاد:

12,7	۱۸,۷	17,7	71,V	٣١,١	47,7	٤٠	٣٦	سعر يوزميل البترون ناس
١,٦	٠,٩	١	۲,۳	۲,٧	٣,٢	٣,٥	٠,٩١	

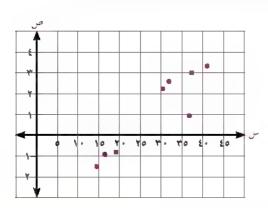
أولًا: ارسم شكل الانتشار وبين منه نوع الارتباط.

ثانيًا: أوجد معادلة خط الانحدار للبيانات المعطاة .

ثالثًا: تنبأ بالنمو الاقتصادي عندما يكون سعر البرميل ١٥ دولارًا، ثم عندما يصبح سعره ٣٥ دولارًا.

🥠 الحل

أولًا: الشكل المقابل يمثل شكل الانتشار وهو يبين أن الارتباط طردى.



	7.5		اس ا	
44,47	٠,٨٢٨١	1797	٠,٩١	de al
١٤.	17,70	17	٣,٥	٤٠
۱۱۰٫۸٤	1.,72	177.58	٣,٢	47, 4
۸۳,۹۷	٧,٢٩	977,71	٧,٧	٣١,١
٦٨,٣١	0, 49	۸۸۲,٠٩	۲,۳	44,7
١٦,٣	١	770,79	١	17,4
۱٦,٨٣	۰,۸۱	٣٤٩,٦٩	٠,٩	۱۸,۷
74,47	۲,0٦	۲۱۳,۱٦	١,٦	12,7
٣٨٤,٣٩	٤٠,٢٦٨١	٦٨٨٤, ٢٨	4,11	444,7

من بيانات الجدول:

Σ ω ω 97,3 ΛΥ Σ ω 7,777 Σ ω ω 97,3ΛΥ Σ ω 7 Α7,3ΛΛΓ

ثانيًا: نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة:

$$egin{array}{ccccc} \dot{m{\Sigma}}_{m} & m{\Sigma}_{m} \, m{\Sigma}_{m} \, m{\Sigma}_{m} \\ \dot{m{\Sigma}}_{m} & \dot{m{\Sigma}}_{m} & \dot{m{\Sigma}}_{m} \end{array}$$

 $\cdot, \text{IN97} \simeq \frac{(9, \text{NYTT, 7}) \text{ FAE, F9} \times \text{A}}{\text{F(FFT, 7)} \text{ TANE, FA} \times \text{A}}$ 

£, 177A ~ (1777, 7 × · , 1/97) 9, 11

- · معادلة خط الانحدار هي: ص ا + ب س
  - ن ص ۱۸۹۱ ، س ۲۸۱۸۹۰

#### تالثا

تکون:ش ۱۰×۰,۱۸۹۱ ش ٤,۱۳٦٨ م

عندما س ۱۵

تکون: ص = ۲,٤٩٩٢ × ١٢٦٨ ٢٥×٠,١٨٩٦

عندما س - ۳۵

#### 🚹 حاول أن تحل

🕦 في دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) بآلاف الجنيهات كانت النتائج الآتية:

Em 150 : Em -100 : Emom 110

- Σس۲ ۲۰۰ ، Σص۲ ← ۱۵ ، ن ← ۱۵
- أوجد معامل الارتباط الخطى بين س، ص بطر يقة بيرسون وحدد نوعه. الانحدار.
  - ح تنبأ بقيمة الاستهلاك (ص) عندما يصل الدخل ١٠٠٠٠ جنيه.

# تمــاريـن (۱ – ۲)

التالية:	الإجابات	من بين ا	الصحيحة	الإجابة	: أختر	أولًا
- Mai			-et		_	-

المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هى:

		صُ = أ ÷ ب س	, <del>(پ</del>	ا صُ اس + ب				
		ص = أ + ب ص .	, (3)		ب+ ب	🗢 صُ اص		
ى:	: عندما س	قيمة ص المتوقعا	١ ۽ ٥ , ٠ س فإن	ار هي: ص	لة خط الانحد	😯 إذا كانت معادا		
	V (?)	•	/ <del>?</del>	٥ (ب	•)	٤ 🕦		
,، ص يكون:	ن الارتباط بين س	ر ص على س فإر	على خط انحدا	۱۰)، (۰,۲،۰)	لتان (۱۱٫۵،	🔻 إذا وقعت النقم		
	ه منعدمًا							
تقع على نفس	ميع النقاط التالية	, على س فإن ج	خط انحدار ص	، (۱٤ ، ٤) على	لتان (۵، ۱۳)	النقص النقص النقص		
(	17:0)	(17:71)	) 🔄	(۸،۱۰) 😉	•	(0,10)		
						ه إذا كانت جميع		
	1 3	٠,٥	?	🗨 صفر	•)	11		
الارتباط بين	رجب، فان معامر	مستقيم ميله مو	تقع على خط	شكل الانتشار	بع النقاط في	ر إذا كانت جم		
						المتغيرين يسار		
	1 3	1	<del>!</del> (*)	🎔 صفر	•	1-1		
					سئلة الآتية:	ثانيًا: أجب عن الأه		
			ص :	ن متغيرين س،	يبين العلاقة يي	الجدول الآتى		
۲.		\٤	١.	٨	٥			
\0	14							
	. الاتحدار	وجد معادلة خط	<b>(</b> •)		لل الانتشار	🕦 أرسم شك		
				14-	ص عندما س	عنبأ بقيمة		
					دول الآتي:	٨ من بيانات الجا		
۲٥	Y7 10	14	٤٠			r		
9	۸	٤	11			V		
						ا تنبأ بقيمة		
			ر، ۲۰	س ﴿ إِذَا كَانَتِ سَ	ار الخطأ في ه	😲 أوجد مقد		

و فی دراسة إحصائیة لإیجاد العلاقة بین متغیرین س ، صحصلنا علی البیانات التالیة: ن ۱۰ ، س ۸ ، ص ۱۰ ، ۲ س ص ۱۰ ، ۲ س ص ۱۲۰ ، ۲ س۲ متعاد ۱۲۰۰ أوجد:

🛈 معامل الارتباط الخطي.

أب معادلة خط الانحدار.

اِذَا كَانَ: كَسَ ٣٠، كَ صَ ٤٠، كَ سَ صَ ١٦٢ كَ عَ كَ سَ صَ ١٦٢ كَ عَ اللَّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَ كَ سَرٌ = ٢١٠، كَصِرٌ = ٢٠٤، نَ = ٦ فَأُوجِد:

- 1 معادلة خط الانحدار.
- 👽 معامل الارتباط الخطى بين س ، ص محددا نوعه.
- (١) الربط بالمبيعات في أحد أماكن بيع السيارات المستعملة كانت المبيعات على النحو التالي:

							٣	
٦.	۸٥	٤٠	źo	٩٨	٧٤	٨٠	0 2	

- 1 معامل الارتباط الخطى لبيرسون
  - (ب) معادلة خط الانحدار.
- (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات المخل الشهرى (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات:

٤٤	27	77	٥٦	٤٠	٣٩	47	۲۸	الدخل (می ا لانفاق (می ا
44	47	٣٨	٣١	۲۸	۲٠	70	19	الإنفاق (ميل

- أوجد معامل ارتباط الرتب بيرسون وحدد نوعه.
  - 史 أوجد معادلة خط الانحدار .
- قدر قيمة الانفاق (ص) إذا كان الدخل (س) ٥٠٠٠ جنيه .
  - ( ) أوجد مقدار الخطأ في (ص) إذا كانت س ٤٠.
- المدن، أُخذت عينة مكونة من ٤٠ أسرة فأعطت النواتج الآتية:

∑س ۱۰۰ ، ∑ص ۱۲۰ ، ∑س ص ۱۲۱ ، کس ا ۱۱۰ ، کس ا ۱۰۱ ، کص ۲۰۰۰.

- أوجد معادلة خط الانحدار.
- 史 تنبأ بدخل الأسرة التي يبلغ استهلاكها ٧٠٠ جنيه شهريًّا.







سينا الرسيب

العلوم التطبيقية ؛ فهي أدوات

تُعدُ المقاييس الإحصائية جزءًا أساسيًا من تستخدم لقياس الظواهر والمتغيرات المختلفة،

وتساعدنا هذه المقاييس في تلخيص وتحليل البيانات،

وفهم العلاقات بين المتغيرات، واستنتاج النتائج، والتنبؤ بحدوث

بعض الظواهر، وتتنوع المقاييس الاحصائية بحسب النوع وخصائص البيانات التي نعمل عليها، مثل: عرض البيانات باستخدام طريقة الساق والأوراق، وحساب الرباعيات لمجموعة من البيانات وتمثيلها بيانيًا، وحساب نصف المدى الربيعي لمجموعة من البيانات باستخدام الجداول التكرارية وباستخدام طريقة الساق والأوراق؛ كل ذلك من خلال تطبيقات حياتية في مجالات متنوعة مثل: علوم الحاسب والطب والصناعة، والزراعة، ...... إلخ ؛ بما يجعل الطالب يُقدَّر أهمية دراسة المقاييس الإحصائية في الحياة.

OF CHIEF NO



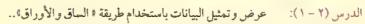
#### يتوقع بعد دراسة الطالب لهذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة أن :

- يعرص مجموعة البيانات باستخدام طريقة
   الساق والأوراق
- يقارن بين مجموعتين من البيانات باستخدام طريقة الساق والأوراق.
- یتعرف ممیزات وعیوب طریقة الساق والأوراق لعرص البیانات
- بحسب الرباعيات لمجموعة من البيانات ويمثلها بيانيا.
- يحسب نصف المدى الربيعى لمجموعة من البيانات باستخدام الجدول التكراري واستخدام طريقة الساق والأوراق
  - 🖶 يقدر اهمية الإحصاء في الحياه اليومية .

### المصطلحات الأساسية 🗍 🕇

- التمثيل بالساق والأوراق ﴿ الربيع الأول (الأدني)
- د الساق والأوراق د الربيع الثاني (الوسيط)
- ا التمثيل المزدوج لنساق والأوراق الربيع الثالث (الأعلى)
  - 🥇 تصف المدى الربيعي. 🦠 التمثيل الصندرقي





الدرس (٢ - ٢): الرباعيات وتمثيلها بيائيا.

الدرس (٢ – ٣): نصف المدى الربيعي.

### تنظرمي للوحدة

#### مقاييس متقدمة فى الاحصاء

تمثيل مجموعة من البيانات بطريقة الساق والأوراق.

> التمثيل بالساق والأوراق

التمثيل المزدوم لل<mark>ساق والأوراق</mark>

الرباعيات

الربيع الأول (الأدني)

الجدول التكراري

التكرارالمتجمع الصاعد

الربيع الثاني(الوسيط)

الربيع الثالث(الأعلى)

التمثيل الصندوقي

نصف المدى الربيعى

### الوحدة الثانية

# 1 - 4

# مقثيل البيانات باستخدام ۵ استخدام طريقة الساق

#### سوف تتعلم

طريقة «الساق والأوراق » والأوراق في مقارنة مجموعة من البيانات.

#### المصطلحات الأساسية

offenter of the fixed in the second

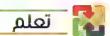
التمثيل بالساق والأوراق إلساق Stem leaves الأوراق التمثيل المزدوج للساق والأوراق

# فگر و ناقش

البيانات التالية تمثل النقاط التي سجلها ١٦ لاعبا في أحد الفرق المدرسية لكرة السلة.

#### أوجد:

- أكبرعدد من النقاط التي سجلها أحد اللاعبين.
  - عدداللاعبين الذين سجلوا أكثرمن ١٠نقاط.



#### تمثيل البيانات بالساق والأوراق

عند تمثيل البيانات ٨، ١٣٥، ٧١، ٣٤٥٢ بطريقة الساق والأوراق نرتب البيانات تصاعدًيا، ويكون العدد الموجود في المنزلة الصغرى (الآحاد) ممثلًا للورقة وباقى العدد ممثلا للساق كما هو بالجدول.



- ١ من بيانات فكر وناقش مثل هذة البيانات بطريقة الساق و الأوراق.
  - 🐠 الحل

الخطوة الأولى اوجد أكبر وأصغر قيمة من البيانات ثم حدد رقم العشرات لكل منهما

- أصغر قيمة هي ٥ ، رقم العشرات هو صفر
  - أكبر قيمة هي ٢٥، رقم العشرات هو ٢

الخطوة الثانية إرسم خطاً رأسيا، و آخر أفقيا حيث يتم تسجيل الساق على اليسار ويتم تسجيل الأوراق على اليمين. الخطوة الثالثتن اكتب الأوراق المناظرة لكل ساق على الجانب الأيمن من الخط فمثلًا للعدد : ١٩ اكتب ٩ الى يمين الرقم ١ ، والعدد ٦ إلى يمين الرقم صفر وهكذا حتى ندون



11

21

4.

15



الساق	الأوراق	العدد
•	Α	٨
٧	A.	٧١
14	٥	140
450	۲	7637

الساق	١لأوراق	العدد
	۸	٨
٧	N.	٧١
14	٥	140
450	۲	T207

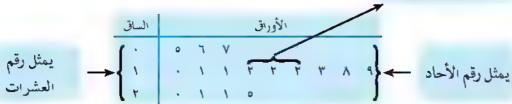
الساق		الأوراق							
•	٧	٦	٥						
N.	٠.	٩	Α	٣	$\Lambda_{i}$	۲	۲	۲	٨
۲	٥	A	A	٠					

المفتاح ٢٥ - ١٥

جميع البيانات مع تكرار الورقة بعدد مرات تكرارها في البيانات. الخطوة الرابعة ترتب الأوراق ترتيبًا تصاعديًا . ثم ضع مفتاحًا يوضح كيف تقرأ البيانات

تكتب الأوراق مهما

تكررت أكثر من مرة



المفتاح ١٢ ١٣١

#### لاحظ أن

أكبر عدد من النقاط التي سجلها احد اللاعبين ٢٥ نقطة عدد اللاعبين الذين سجلوا أكثر من ١٠ نقاط ١٢ لاعب

#### 🛂 حاول أن تحل

البيانات التالية توضح درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات

۸٦	۸٩	٧٢	٧٨	94
۸۸	٧٣	۸۱	V٦	۸٥
٧V	۸۲	۸۲	٧٥	۸۳
9.4	1	9.6	AY	۸٦



لأى مجموعة من القيم يكون:
الوسط الحسابى= مجموع القيم
الوسيط هو القيمة التى تتوسط
مجموعة من القيم المرتبة
تصاعديًا أو تنازليًا
المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا
أو شيوعًا.

#### المطلوب:

- أ تمثيل البيانات بطريقة الساق والأوراق باحسب وسيط هذه الدرجات؟
- ج إذا كان تقدير الممتاز يعطى للطلاب الحاصلين على ٨٥ درجة فأكثر فما عدد الطلاب الحاصلين على تقدير ممتاز؟

#### الربط بالرباضح

### مثال 🚮

البيانات التالية تمثل زمن سباق الدراجات في إحدى الألعاب الأوليمبية . وهو مقاس بالثانية

91,8	٩٠,٣	۸۹,۷	٨٤,٣	۸۷, ۵	٩٠,٤	۸٩,٤
۸۸٫۲	۸۹,۱	۸٦	۸۹,۲	۸٤,١	۸٦,٧	٩١
<b>—</b>	P. A.A.	51.1	7.84	9.4	31.0	A9 0



#### المطلوب:

- أ تمثيل البيانات بطريقة الساق والأوراق
- 💬 ما الزمن الذي استغرقه المتسابق الأخير للوصول إلى نهاية السباق؟.

#### 🔷 الحل

- البیانات بطریقة الساق والأوراق البیانات تحتوی علی أرقام عشریة وهی تمثل المنزلة الصغری (الأوراق) والأرقام الصحیحة تمثل العشرات (الساق) أقل عدد صحیح ۸۶، وأكبر عدد صحیح هو ۹۱ ... الساق هو الأعداد من ۸۶ إلى ۹۱
  - 👽 المتسابق الأخير قد استغرق من الزمن ٤, ٩١ ثانية

زمن سباق الدراجات										
الساق	الأوراق									
٨٤	٣	A								
۸٦	٧	•								
۸۷	٥									
٨٨	۲	٩								
۸۹	٤	٧	۲	A	٥	۲				
۹.	٤	٣	٥	۲						
91	٤	,	٨							

ترتيب الأوراق
المفتاح ۸۸,۲ ۲ ۸۸۱

زمن سباق الدراجات											
الساق	الأوراق										
٨٤	- 1	٣									
۸٦		٧									
۸٧	٥										
۸۸	۲	٩									
۸۹	A.	۲	۲	٤	٥	٧					
٩.	۲	٣	٤	٥							
91	٠,	A	٤								

### 🚹 حاول أن تحل

#### الربط بالأوزان

- التمثيل المجاور يمثل متوسط أوزان الكتاكيت بالجرام
  - ما أقل وأعلى وزن ٩
  - 史 ما وسيط هذه الأوزان ؟
  - ح ما المتوال لهذه الأوزان؟.





المفتاح ٨٣ - ١ ١٨

# تعلم

### التمثيل المزدوج بالساق والأوراق

يمكن مقارنة مجموعتين من البيانات بالتمثيل المزدوج بطريقة الساق والأوراق حيث يكون الساق للبيانات الأولى هو نفسه الساق للبيانات الثانية وتكون الأوراق للبيانات الثانية على يمين الساق والأوراق للبيانات الثانية على يسار الساق.

الساق

المفتاح

### مثال 👩

البيانات التالية تمثل درجات الحرارة العظمى والصغرى لمدينة الاسكندرية خلال أسبوعين

٤٢	٤١	44	47	45	47	40	44	49	70	49	77	۲۸	19	
۲۱	44	۳.	71	44	44	77	11	۲-	17	١٨	19	77	14	

المطلوب تمثيل درجة الحرارة بالساق والأوراق مع وصف هذه الدرجات وأى من هذه الدرجات اكثر تباينا

44 44

#### 🔷 الحل

مؤكلية		-4
		تبلغ أكبر درجة حرارة عظمي ٤٢ درجة
9 9		وأقل درجة حرارة عظمي ١٩ درجة
٧	٩	◄ الساق يكون من ١ الى ٤

◄ من الشكل المقابل نجد أن كل
 درجات الحرارة العظمى تتراوح

بين (١٩ - ٤٢ ) بينما نجد أن كل الدرجات الصغرى تتراوح بين (١٣ - ٢٢ )



7 7 1 1 .

1 4 14

المدى الفرق بين أكبر مفردة وأقل مفردة ◄ مدى درجة الحرارة العظمى ٣٦٠، مدى درجات الحرارة الصغرى ١٩ ومنها: نجد أن درجات الحرارة العظمى أكثر تباينًا من درجات الحرارة العظمى الصغرى

#### مميزات طريقة تمثيل البيانات بالساق والأوراق

يتم الاحتفاظ بالبيانات الأصلية عكس الجداول التكرارية التي لا يمكن العودة للبيانات الأصلية بعد تمثيلها في الجداول التكرارية كما سبق أن درست ذلك.

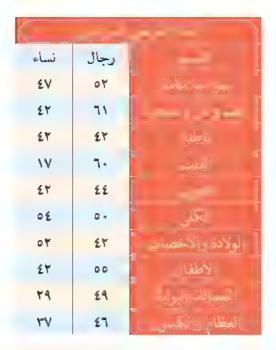
#### عيوبها

لا تكون مناسبة للبيانات ذات الأحجام الكبيرة.

#### 🚹 حاول أن تحل

(٣) الربط بالصحتيمثل الجدول التالى اعداد المرضى المترددين من الرجال والنساء على أحد المستشفيات خلال أسبوع

مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق مع وصف هذه البيانات وأى من هذه البيانات أكثر تباينا.



# تمارین ۲–۱

١ ضع علامة ( ✔) أمام العبارة الصحيحة ، علامة ( ٨) اأمام العبارة الخطأ لكل من:

التمثيل المقابل يمثل ارتفاع مجموعة من الأشجار بالمتر

معظم الاشجار یکون ارتفاعها أقل من ۲۰ متر.

🗨 الوسيط لإرتفاع الأشجار هو ١١ متر.

المدى الإرتفاع الأشجار هو ٢٥ متر .

💿 المنوال لإرتفاع الأشجار هو ١١ متر.

المفتاح ← ١٥ ١٥ ١

1 7 2 0 7 1 9

البيانات التالية تمثل أعداد كتب الرياضيات في مكتبات ١٥ مدرسة:



الساق

الساق		الأوراق									
	A.	1	A	۲							
N.		A	A	A	۲	۲	٣	٣	٤		
۲	A.	1									

المفتاح ← ۱۳ ۱۳

المطلوب كتابة البيانات الاصلية لعدد الكتب لكل مدرسة

#### الريط بالأطوال

💎 البيانات التالية تمثل أطوال ٣٠ طالبًا بأحد المدارس الثانوية مقاسة بالسنتيمتر

١٨٢	۱۸۰	177	177	170	145	100	171
170	177	۱۸۸	۱۸٥	177	١٧٠	10V	۱۷۰
۱۷۸	170	177	179	171	١٥٨	177	109
		۱۸۱	۱۷۸	۱۷۰	177	١٥٨	178

المطلوب عرض البيانات بإستخدام طريقة الساق والأوراق.

٤ مثل كل مجموعة البيانات التالية بطريقة الساق والأوراق على حدة:

77	44	14	۲۷	10	19	١٣	۲۷	11	٩	47	١٠	
17	11	٣٤	11	٣0	49	٩	٣.	10	10	14	- 11	
		۲,۲	٤,١	۲,0	-,0	٥,٨	٦,٦	۲	٣	۲,٤	١,١	المجموعة الفائق

(٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) في التمثيل المقابل: أكبر عدد هو .....

₹₹,0 ♥ ₹,V\ Î

TV0 3 TV,0 ?

(٢)الوسيط للتمثيل السابق هو:

۲۵,۸ 😲

70,£ (1)

YON (3)

40£ =

الساق	الأوراق									
۲۳	٤	0								
72	٤	٧	٩							
70	٠.	٤	٨	٨						
47	٣	٨	٩							
47	١.	۲	٥							

المفتاح ← ۲٤٫۷ (دفتاح

#### الربط بدرجات الحرارة

- 🕤 البيانات التالية تمثل درجات الحرارة العظمي و الصغرى لبعض محافظات جمهورية مصر العربية:
  - 🚺 مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق (تمثير مزدوج)؟
    - 😯 أوجد الوسيط لكل مجموعة على حدة؟
      - خ أى من هذه الدرجات أكثر تباينًا؟

درجة الحرارة الصغرى	درجة الحرارة العظمي	
77	47	
**	۲٦	
70	۳.	=
۱۷	۲٥	
١٨	47	
77	47	
44	٤١	<b>\</b>
75	۲.	J

# الوحدة الثانية

#### Quartiles and Boxplot

المصطلحات الأساسية	سوف تتعلم
--------------------	-----------

			<u> </u>
الساق والأوراق	" المربيع الأدنى (الأول)	<ul> <li>تعيين الرباعيات بطريقة</li> </ul>	الرباعيات وتمثيلها بيانيًا
🦽 الجدول التكراري	💣 الربيع الأوسط (الثاني)	الساق والأوراق	متعيين الرباعيات من الجداول
التكرارالمتجمع الصاعد	🗗 الربيع الأعلى (الثالث)	🥏 التمثيل الصندوقي .	التكرارية
	فالمشا المشاك		

# 🎒 فکر و ناقش





نفذ معلمو الرياضيات في إحدى المدارس اختبار نصف الفصل الدراسي لعدد ٢٠٠ طالب، وتم تدوين النتائج بدفتر الدرجات وترتيب الطلاب باستخدام برنامج Excel وقسم الطلاب إلى قسمين متساويين عن طريق مقياس إحصائي هو الوسيط (أحد مقاييس النزعة المركزية) إلى الأضعف والمتفوقين وذلك لعمل برامج تقوية مناسبة لكل مستوى.

إلا أن هذا التقسيم لم يكن كافيًا لوصف المستوى التحصيلي للطلاب. وطلب موجه المادة تقسيم الطلاب إلى المستويات التالية: (ضعيف مقبول جيد ممتاز) فأمكن تقسيم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية. فكيف تنفذ ذلك سواء كانت البيانات مفردة أو ممثلة بجدول تكراري أو طريقة الساق والأوراق وماذا نسمى القيّم التي تقسم هذه البيانات ؟



بعد ترتيب البيانات تصاعديًا أوتنازليًا فإن القيمَّ التي تقسم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية تسمى "الرباعيات" وعددها ثلاث قيم هي:

الما النصف التاني (ممان وهو الوسيط أي القيمة التي يسبقها لله البيانات (٥٠٪) و يليها النصف الآخر. <u>٣- الوبيع الثالث ( مم):</u> وهو القيمة التي يسبقها ؟ البيانات ( ٧٥٪) و يليها ربع البيانات (٢٥٪).

#### تعيين الرباعيات من البيانات المفردة (غير المبوبة) يوجد حالتان:

الحالة الأولية إذا كان عدد البيانات ب فرديا، (ب + ١) يقبل القسمة على ٤، فإن الرباعيات تكون إحدى قيم البيانات المعطاة ويعين مباشرة منها كالتالي:

> $\frac{1+\omega}{2}$  ترتیب الربیع الأول (مرر)  $(-\infty, -\infty) = \frac{(-\infty, -\infty)}{\sqrt{2}}$  (الوسيط)

 $\frac{(1+\omega)^{m}}{2}$  رتب الربيع الثالث (س»)

## مثال 🚮

١٠ أوجد الرباعيات الثلاثة للقيم التالية :٢٢ ، ٧ ، ١٦ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١ ، ٢١ ، ١٥ ، ٢٢ ، ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ٩ ، ٣

🔷 الحل

ب + ١ - ١٦ (يقبل القسمة على ٤) · • الرباعيات تكون احدى قيم

أولا: ترتيب البيانات تصاعديا

ثانيًا:عددالبيانات ب = ١٥ (عدد فردي)



الفرق بين ترتيب الربيع وقيمته

البیانات 
$$ترتیب الربیع الأول  $(\sim, \sim) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  وقیمته  $\frac{1}{2}$  ترتیب الربیع الثانی  $(\sim, \sim) = \frac{1+1}{2} - \frac{1}{2}$  ۸ وقیمته ۱۰ ترتیب الربیع الثالث  $(\sim, \sim) = \frac{1+1}{2} - \frac{1}{2}$  ۱۲ وقیمته ۱۳ ترتیب الربیع الثالث  $(\sim, \sim) = \frac{1}{2} - \frac{2\Lambda}{2}$  ۱۲ وقیمته ۱۳$$

الحالة التانية إذا كان عدد البيانات به زوجيًا أو فرديًا، (ب + ١) لايقبل القسمة على ٤، فإنه يتم تعيين الرباعيات من القانون التالي:

قيمة الربيع المطلوب = القيمة السابقة له + (القيمة التالية له - القيمة السابقة له) (ترتيبه الترتيب السابق له)

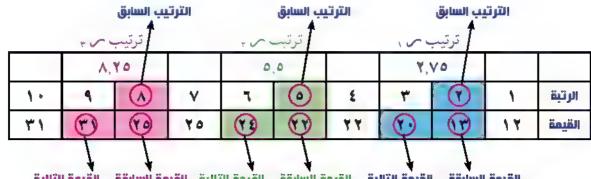






#### 🔷 الحل

الساق	الأوراق									
N.	۲	٣								
۲	•	۲	۲	٤	٥	٥				
٣	- 1	٣								
	Y £	7 1	<b>←</b>	اح –	المفة					



القيمة السابقة القيمة التالية القيمة السابقة القيمة التالية القيمة السابقة القيمة التالية

#### 📊 حاول أن تحل

- ١) في المثال السابق أوجد الوسيط بطريقتين مختلفتين ثم قارن النتيجتين ؟
- (٧) اوجد الرباعيات الثلاثة (الأدنى الأوسط الأعلى) للبيانات المقابلة

الساق		الأوراق											
•	٦	٧	٥										
N.	٩		A	٣	٨	۲	۲	A.	۲				
۲	٥	A		١									
			١,٩	19 -	<b>—</b>	لفتاح	ال						

#### إيجاد الرباعيات من الجداول التكرارية:

سبق أن تعلمت إيجاد قيمة الوسيط بيانيًا عن طريق تعيين تقاطع المنحني التكراري المتجمع الصاعد مع المنحني التكراري المتجمع النازل وهو يمثل الوسيط (الربيع الثاني) وسوف تتعلم طريقة إيجاد الرباعيات كمايلي:

### أولاً: تعيين الرباعيات جبريًا:

الخطوة الأولعين ننشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الخطوة الثانيق نعين رتب الرباعيات

(رتبة الربيع الأول في ، رتبة الربيع الثاني ٢٠٠٠ ، رتبة الربيع الثالث ٢٠٠٠)

الخطوة الثالثين نحدد الفترة ( الفئة ) التي يقع الربيع المطلوب فيها ( تسمى الفترة الربيعية ) ونحدد منها بداية الفترة ، طول الفترة ، عدد تكرارات الفترة ،التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع

الخطوة الرابعتن نستخدم القانون التالي لحساب الربيع المطلوب

# الربيع المطلوب بداية فترة الربيع + رتبة الربيع التكرارات السابقة لفترة الربيع × طول الفترة الربيع المناظر لفترة الربيع

#### إلريط بالصناعت:

# مثال 🚮





المجموع	٤٧	٤٢	۳۷	44	77	77	
D •	٨	11	٨	1-	٣	٩	التكول (التكول

### تكون جدول التكرار المتجمع الصاعد المناظر:

# ١) تعيين الربيع الأول ١٠٠٠

رتبة مر ، = ٥٠

- رتبه مرريقع في الفترة بين ١٢، ٢٢ (من عمود التكرار المتجمع الصاعد)
  - ٠٠٠ بداية فترة الربيع الأول ٢٣
    - طول فترة الربيع الأول ٥
  - التكرار المناظر لفترة الربيع ١٠

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الأول ١٢

بالتعويض في قانون تعيين الربيع الأول

., to + tt 0 × · , 0 + tt 0 × 1t 1t, 0 + tt , 0

TT, TO 10.

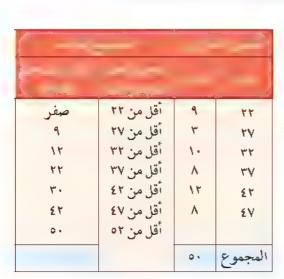
## ٢) تعيين الربيع الثاني ( الوسيط ) ٦٠٠ :

رتبة ١٠٠٠ ٢٥ ٥٠

- . رتبة مرب تقع في الفترة بين ٢٢، ٣٠
  - ٠٠٠ بداية فترة الربيع الثاني ٢٧
    - طول فترة الربيع الثاني ٥٠

التكرار المناظر لفترة الربيع الثاني ٨

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الثاني ٢٢



$$\frac{10}{\Lambda}$$
 + TV  $0 \times \frac{FF}{\Lambda}$  + TV  $V$ 

# ٣) تعيين الربيع الثالث ١٠٠٠:

- - رتبة مر يقع في الفترة بين ٣٠ ، ٤٢

- - بداية الفترة ٢٢

طول الفترة ٥

التكرار المناظر لفترة الربيع الثالث ١٢

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الثالث ٢٠

#### ثانيا؛ تعيين الرباعيات بيانيًا ؛

سبق وتعلمت إيجاد الوسيط بيانيًا من المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو المنحنى التكراري المتجمع النازل ويمكن تطبيق نفس الطريقة لتعيين الرباعيات وذلك باتباع الخطوات التالية:

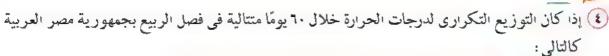
الخطوة الأولى تعيين الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الخطوة الثانيق رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

الخطوة الثالثة عيين رتب الرباعيات  $(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2})$  وتحديدها علي المحور الرأسي (التكرارات المتجمعة)

الخطوة الرابعتن عند كل رتبة من رتب الرباعيات نرسم خط أفقى يقطع المنحنى في نقطة فيكون قيمة الربيع هي مسقط هذه النقطة على المحور الأفقى

# مثال 🚮



المجموع	۲۸	47	45	**	۲.	١٨	١٦	
٦.	٥	٧	٩	۱۸	۸٠.	٧	٤	

أوجد الرباعيات بيانيا

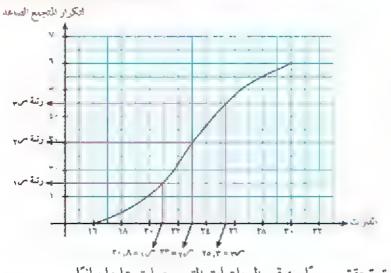
#### 🔷 الحل

∵ ل ، ۱۰

رتبة الربيع الاول ١٠٠ ١٠ ١٥ ١٥ رتبة الربيع الثاني ١٠٠ ٢٠ ٢٠

رتبة الربيع الثالث من = المحمد المحم

		1	
صفر	أقل من ١٦	٤	17
٤	أقل من ١٨	٧	۱۸
11	أقل من ٢٠	١.	۲.
71	أقل من ٢٢	١٨	**
٣٩	أقل من ۴٤	٩	45
٤٨	أقل من ٢٦	٧	*7
00	أقل من ٢٨	٥	44
7+	أقل من ٣٠	7-	المجموع



من الرسم نجد أن: قيمة من ٢٠٠٨ قيمة من ٢٣ قيمة من ٢٥,٣

## 🛂 حاول أن تحل

- 👚 في المثال السابق تحقق جبريًا من قيم الرباعيات التي حصلت عليها بيانيًا
- الربط بالطبية إذا كان الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لمتوسط الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من ٥٠ شخص فأوجد الرباعيات جبريًا وبيانيًا.

المجموع	١٨	17	17	10	12	14	
٥٠	١	١.	17	١٥	٥	٣	

# 🚹 حاول أن تحل

(1) إذا كان الجدول التالي يمثل نتائج امتحانات ٢٠٠ طالب في مادة الرياضيات على إعتبار أن أقل درجة هي ١٠ والدرجة النهائية هي ٥٠ ، أوجد الرباعيات الثلاثة.

المجموع	٤o	٤٠	40	۳.	40	۲٠	10	١.	
۲۰۰	٩	11	۳۸	٥٨	۴٥	۲-	۱۷	17	



#### إيجاد الرباعيات لبيانات ممثلة بطريقة الساق والأوراق:

سبق وأن درسنا أن الوسيط (الربيع الثاني) في البيانات المفردة بعد ترتيبها :

(۱) إذا كان  $\omega$  عددًا فرديًا فإن: الوسيط قيمة الحد الذي رتبته  $\frac{\omega+1}{2}$ 

(۲) إذا كان به عددًا زوجيًا فإن: الوسيط  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  [قيمة الحد الذي رتبته  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  + قيمة الحد الذي رتبته  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  + 1]

ويصورة عامم إذا كان عدد البيانات هو له وكان له ؛ اعدد يقبل القسمة على ٤ فإن الرباعيات هي أحد مفردات الجدول المعطى ونحصل عليها مباشرة من العلاقة التالية:

ترتيب الربيع الثالث مر (الأعلى) ٣(١٠٠١)

# مثال مثال

ات	لاختبار	احدا	با فی	١٥طالًا	جات	، در	تمثل	التالية	البيانات	0
أن	اعتبار	على	أوراق	ل والأ	الساق	يقة	بطر	ممثلة	الشهرية	
		(ثة.	ت الثلا	, باعبا	وحداث	۲، آو	مې ه	لنهائية	الدرجة ا	

الساق	الأوراق								
4	A.	A	A.	۲	۲	٣	٣	ı	
1	•	A	A	A	٤				
۲	1	۲	۲						

المفتاح ← ١٠ - ١٠

#### 🔷 الحل

" البيانات في الجدول مرتبة تصاعديًا

لذا فإننا نوجد ترتيب الرباعيات ونعينها من بيانات الجدول مباشرة

١) الربيع الأولى، ترتيبه الم الم الم عام ١٠٠٠ ع ( العنصر الرابع في الصف الأول ) قيمة الربيع الأول

Y 10 -

$$\Lambda = \frac{17}{7} - \frac{1+0}{7}$$
 الربيع الثانى مى ترتيبه مرب ترتيبه الثانى مى الثانى الثانى الثانى مى الثانى الثانى مى الثانى الث

٢) الربيع الثالث مرم ترتيبه

يوجد مقاييس مواضع أخرى

مثل العشيرات (تقسم البيانات

إلى عشرة أقسام متساوية

والمثينيات التي تقسم البيانات إلى مئة قسم متساو وهكذا ....

٠٠. قيمة ٧٠ ا ١٤ (العنصر الخامس من الصف الثاني)

#### التمثيل الصندوقي Box Plot

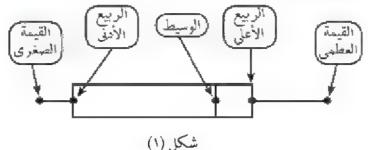
# تعلم



يطلق على الرباعيات أنها مقاييس موضع ترتيبيه وتستخدم لتوضيح مدى توزيع البيانات.

التمثيل الصندوقي يستخدم تلك القيم في وصف البيانات عن طريق رسم مستطيل بدايته الربيع الأدنى ونهايته الربيع الأعلى وذلك بعد تمثيل البيانات التالية على نفس الخط مرتبة

(القيمة الصغري الربيع الأدنى الوسيط الربيع الأعلى القيمة العظمي) ويسمي الشكل الناتج (الصندوق ذو الطرفين)

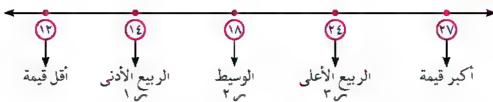


# مثال 🚮

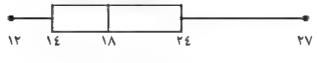


🖜 مثل البيانات التالية ١٤ ، ٢٤ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ١٦ ، ٢١ ، ١٧ ، ١٣ ، ٢٧ باستخدام التمثيل الصندوقي.





التمثيل الصندوقي المناظر للبيانات السابقة كالتالي:



شکل (۲)

- ١) نلاحظ أن ٥٠٪ من البيانات بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى
  - ٢) يمكن رسم التمثيل الصندوقي بطريقة رأسية

#### 🚹 حاول ان تحل

عين التمثيل الصندوقي للبيانات التالية

14.10.14.14.4.45.44

الساق			وراق	ルゼャ		ب
٤	٠.	٣	٣	7	٧	
0	- 1	٨	٩			
٦	۲	٣	٤			

المفتاح ١٥ ١ ٥



٧ الدرجات التالية تمثل درجات ١٥ طالبًا في امتحان مادة لإحصاء

۱۸	۲۳	٤٥	٤٠	۳۷
0.0	٤٩	۲۸	۳۵	٤٤
۲3	44	۳٥	۰۸	10

أوجد التمثيل الصندوقي لهذه البيانات

#### 🔷 الحل

الترتيب التصاعدي للدرجات هو:

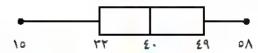
01.00.07.29.20.22.27.2.47.470.77.77.17.10.00.00.07.

أصغر قيمة ١٥ ، أكبر قيمة ٥٨

الربيع الأول (الأدني) - ٢٢

الربيع الثاني (الوسيط) = ٤٠

الربيع الثالث (الأعلى) ٤٩





- أوجد الربيع الأدنى و الأوسط والأعلى للقيم التالية:
  - 1 . V . 1 / A . V . O A . A . P . TP
  - ٩ ١٨ ١٤ ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٧ ، ٧ ، ٩

الساق			<sup>ۇ</sup> و ر∧ق	יצי		جّے/
٤		٣	٣	٦	٧	
٥	A.	٨	٩			
٦	۲					
٥	۸ ه	۸ 🔫	,	لمفتاء	V	

الديط بالطاقتين في دراسة لاستهلاك مجموعة من السيارات تعمل بالبنزين كانت النتائج كالتالي:



٤٥	٤٠	٣٥	۳.	40	۲.	
٨	7"	٧	11	11	٧	

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ثم أوجد الرباعيات بطريقتين مختلفتين..

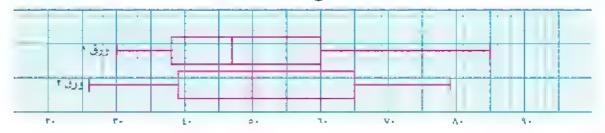
اثتمثیل المجاور یمثل بیانات درجات تلامیذ فصلین مختلفین فی مادة العلوم:
 أوجد التمثیل الصندوقی لكل من الفصلین ثم احسب الرباعیات

		ئانى	سل الث	الفو			الساق	الفصل الأول						
					٣	۲	٣	٤						
				٣	۲	•	٤		Λ	Λ	۲	۲	٣	٣
0	٤	٣	٣	۲	•	•	o		•	A				
					٣	A.	٦	٤						
5.4	£Y	_					المفتاح						0 .	٥.

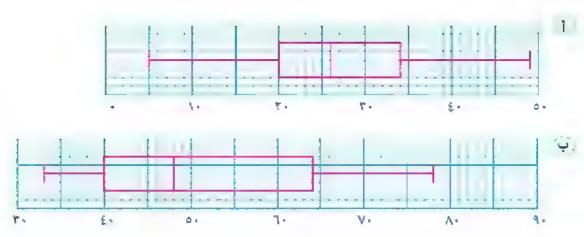
٠ امفتاح ٢ ٤ ٢٤ حاء ١٥٠ ١٥٠ ح

الشكل التالى يوضح توزيع درجات امتحانيين لمجموعة من الطلاب:

عين الرباعيات لكل منهما و اكتب جملتين توضح وجه المقارنة بين الدرجات.



و صف كل تمثيل صندوقى تالى مع توضيح أقل قيمة أكبر قيمة الربيع الادنى الوسيط الربيع الأعلى الكل منهما.



# تعنف الرسمان

الوحدة الثانية 4 - 4

Half Range Quartile

#### المصطلحات الأساسية

سوف تتعلم

منصف المسدى الربيعي

-	
	صالمدى م
	الربيع الأول
	مالربيع الثالث الربيع الثالث
	منصف المدى الربيعي منصف المدى الربيعي

# 🗬 فکر ہِ ناقش



توضح البيانات التالية درجات ٧ مجموعات في إحدى مسابقات مادة الرياضيات تحت إشراف معلم الفصل مع العلم ان الدرجة العظمى للمادة . ٥٠ درجة

- ١- أوجد المدى لهذه الدرجات
- ٢- أوجد الرباعيات الثلاثة لهذه الدرجات
  - ارسم التمثيل الصندوقي للبيانات
- ماذا يمثل طول الصندوق وكم يحتوى من البيانات الأصلية ؟

# تعلم 🕌

نظرا لعدم احتواء الصندوق على القيم المتطرفة للبيانات وتمثيله لـ ٥٠ ٪ من القيم فسيتم تعريف نصف المدى الربيعي. كمقياس للتشتت كالتالي :

الربيع الأعلى الربيع الأذنى المدى الربيع الأدنى المدى الربيعي

أى أن س = سمة سما

حيث أن: م " نصف المدى الربيعي"

مر ، الربيع الأعلى

مر ، الربيع الأدني



الدرجة

TV

٣.

٤٨ 21

بعض مقاييس التشتت التي تم دراستها سابق

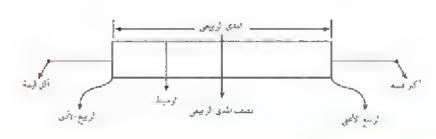
١١) المدي

٢) الاتحراف المعياري

٣) التباين

## مميزات وعيوب نصف المدي الربيعى:

مميزاته: يفضل استخدامه كمقياس للتشتت في حالة وجود قيم متطرفة كما أنه بسيط وسهل في الحساب. عيوبه : لا يأخذ كل القيم في الاعتبار



الأنوات المستخدمة . Excell برنامج

#### الربط بالزراعج

# مثال 🚮



				_		
20 2-	٣٥	۳.	40	۲.	10	
٣	14	۱۸	10	٩	٣	



史 نصف المدى الربيعي للمساحة المزروعة بالذرة



نتبع الخطوات التالية لحساب نصف المدى الربيعي:



47- ...

التكرار السابق لفئة الربيع ٤٥

TO ---

٠٠ نصف المدى الربيعي للمساحة ٥٠٠ هكتار ٥٠ الف متر مربع

#### 🚹 حاول أن تحل

١ تبين البيانات التالية جدول التكرار لأعمار ٢٠ معلما

مجموع	٥٣	٤٨	٤٣	۳۸	PP.	
۲-	٤	۲	٤	٧	٣	مند المعلمين

احسب نصف المدى الربيعي لهذه الأعمار



الهكتار هو وحدة قياس مساحة ويساوي ۲۰۰۰ متر مربع

التكرار المتجمع	
الصاعد	
٣	
14	
77	
٤٥	-51
٥٧	
٦.	أسملك

# مثال 🧀

تبين البيانات التالية درجات مجموعة من التلاميذ في أحد الاختبارات	•
أوجد نصف المدى الربيعي لهذه الدرجات	

🌎 الحل

١٥ (حيث به تمثل عدد البيانات)

د رتبة الربيع الأول 
$$\frac{v+1}{2}$$
  $\frac{v+1}{2}$  3

70 10.

رتبة الربيع الثالث هو 
$$\frac{\gamma(\omega+1)}{2} = \frac{2\Lambda}{2}$$
 ١٢

۸۰-۲۰۰۰

٠٠٠ نصف المدى الربيعي هو م - ٢٠٠٠ من من المربيعي هو م - ٢٠٠٠ من المربيعي هو م - ٢٠٠٠ من المربيعي هو من المربيعي

#### 🚼 حاول أن تحل

﴿ فيما يلى كمية الانتاج اليومي من الألبان باللتر لعينة من الابقار اختيرت من مزرعة:

. T. VY. AI. . T. PY. 37, OY, YY. PY. IY. YY. AY. OY. PI

مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق واحسب نصف المدى الربيعي



الساق



- أوجد المدى ونصف المدى الربيعى للبيانات التالية:
- (1) 13 ; 37; 70; 17; 10; 00; 73; 77; •1; 10; 30; 10
  - 1,0,7,2,1,7,1,1,0,0,2,1,0,9,2,7

#### إلريط بالطول

(٢) الجدول التكراري التالي يوضح اطوال ٢٤٠ طالبة بأحدي الجامعات:

								_	• •	
المجموع	۱۸۰	170	۱۷۰	170	17-	100	10.	120	12.	
45.	۲	O	۲٥	٤٨	٧٢	0 2	۲۱	1.	٣	

أوجد نصف المدى الربيعي مع تمثيل البيانات بطريقة الصندوق

#### الربط بالصحق

(٣) الجدول التكراري التالي يوضح اوزان عدد من المواليد خلال ١٤ يوم في احدى المستشفيات:

المجموع	٤,٥	٤	٣,٥	٣	۲,0	۲	
٣٤	۲	٤	٨	١.	٧	٣	

أوجد الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي)

(٤) إذا كانت البيانات التالية تمثل درجات ١٤ طالب في اختبارين لمادة الرياضيات خلال شهرين متتالين:

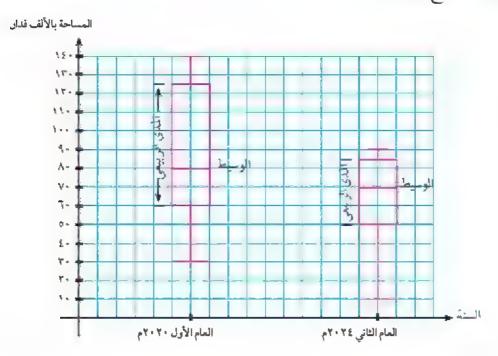
١٠	11	10	١٤	10	٦	۱۸	۱۸	١٤	11	٤	٥	۱۸	۱۷	
17	17	۱۸	۱۸	14	14	11	17	١٨	٨	١.	٨	٤	D	

# المطلوب

- الحسب الرباعيات للاختبارين وكذلك نصف المدى الربيعي
- ي قارن بين درجات الطلاب في الاختبارين مستخدما الوسيط ونصف المدى الربيعي حدد أي من الاختبارين كان أداء الطلاب فيه افضل ولماذا ؟

#### الربط بالزراعي:

- الرسم البياني التالي يمثل المساحة المزروعة بالألف فدان في ٢٥ قرية خلال عامين مختلفين. المطلوب:
  - أوجد الربيع الأعلى والربيع الأدنى والوسيط ونصف المدى الربيعي للسنتين ؟
    - ب ماذا تستنتج من هذه البيانات ؟









سبق أن علمنا بأن علم الإحصاء هو أحد فروع مادة الرياضيات والذي يهتم بجمع البيانات وترتيبها وتقسيرها بهدف أتخاذ القرارات المناسبة لظاهرة ما، وتعتبر الاحتمالات

الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية، وقد استخدمها

الباحثون منذ القدم لأسباب اجتماعية واقتصادية وصحية وغيرها،

وقد تأسس علم الاحتمال بشكله الحالي على يد عدد كبير من العلماء نذكر منهم العالم الفرنسي (بيبر سيمون لابلاس ١٧٤٩ - ١٨٢٧) ومن العلماء الإنجليز (ديمورجان ١٨٠٦ - ١٨٧١) ، (جون قن ١٨٣٤ - ١٩٢٣) والعالم الروسي (أندريه ماركوف ١٨٥٦ - ١٩٢٢) وغيرهم



أتدريه ماركوف



جون ڤن



ديمورجان



بيبر سيمون لابلاس

ومن الجدير بالذكر أن تطبيقات الإحصاء والاحتمال كثيرة في مختلف المجالات التربوية والاجتماعية والاقتصادية، وسوف نتناول في هذه الوحدة دراسة الاحتمال الشرطي بين حدثين ونظرياته وتطبيقاته في مواقف حياتية مختلفة، كما سندرس الأحداث المستقلة وغير المستقلة .

هداف الوحدة



#### في نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- 🖶 يتعرف العمليات على الاحداث.
  - 🖶 يتعرف مفهوم الاجتمال.
- 🖶 يستخدم مسدمات الاحتمال في حساب الاحتمال وقوع حدث.
  - # يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال،
  - 🕸 يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال.

- # يتعرف الأحداث المتنافية وغير المتنافية.
  - تعرف الاحتمال الشرطى
- پستنتج نظریات علی الاحتمال الشرطی.
- بتعرف الأحداث المستقدة وغير المستقلة
- بطق الاحتمال الشرطى في مواقف حياتية مختمة





## الوحدة الثالثة



#### Calculating Probability

#### المصطلحات الأساسية

صساب الاحتصال

#### سوف تتعلم

	٥ أحداث متنافية	random	هتجربة عشوائية
mutually exc	dusive events		experiment
probability	٥ الاحتيال	sample space	۵فضاء العينة
	٥ مسلمات الاحتمال	event	🕰 حدث
probability a	wans	simple event	🕭 حدث بسيط
		certain event	🗘 حدث مؤكد
			محدث مستحيل

impossible event

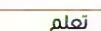
- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث الحدث البسيط الحدث المؤكد الحدث
- العمليات على الأحداث: الاتحاد التقاطع الفرق الإكمال.
  - الأحداث المتنافية .
  - 🗘 قانو نا دي مور جان.
    - مفهوم الاحتيال
  - محساب الاحتمال
  - مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

#### مقدمة ،

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفي هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث في حساب إحتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

Basic terms and concepts

#### مصطلحات ومفاهيم أساسية





#### Random Experiment التجرية العشوائية:

هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.





- ١ بيِّن أيًّا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟
- إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.
- 🛫 سحبت كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة (دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.
  - (ج) إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوى.
- · سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة في الحجم والوزن، الأولى بيضاء. الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

 آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب. الأبوات المستخدمة

#### 🔷 الحل

التجارب (أ) ، (جـ)، (د) هي تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.

بينما تجربة (ب) هي تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

#### 🚹 حاول أن تحل

- بين أيًّا من التجارب الآتية هي تجربة عشوائية :
- 🛈 إلقاء قطعة نقود مرتين متناليتين وملاحظة تنابع الصور والكتابات.

سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

🥕 سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذي يظهر على البطاقة المسحوية.





#### فضاء العينة (فضاء النواتج) : Sample space (outcomes space)

◄ فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)

 ◄ يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف). ملاحظة:

◄ يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا، أو غير منته إذا كان عدد عناصره غير محدود ، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهى.

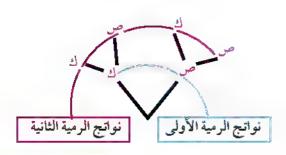
### فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة:

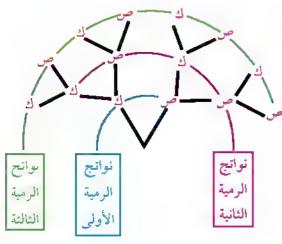
#### أولاً: إلقاء قطعة نقود : Tossing a coin

١ - فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف {ص، ك} حيث ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة ويكون: ن(ف) ٢٠

٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو: ف { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)} ویکون: ن (ف) ۲×۲ ٤ ۲۲







- ٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو:
  - ف { (ص، ص، ص) ، (ك، ك، ك) .
  - (ص، ص، ك) ، (ك، ك، ص)،
  - (ص، ك، ص) ، (ك، ص،ك)،
  - (ص،ك،ص) ، (ك،ص،ص)}
    - ویکون: ن(ف) ۲×۲×۲ م۲۲

#### لاحظ من الأمثلة السابقة

- ١- عندرمي قطعة نقودم من المرات المتتالية يكونن (ف) ٢٦
  - Y- (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟

ثانيًا ؛ إلقاء حجر نرد ؛

- ٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين في الشكل أو الحجم) معًا هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، و يكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب:
  - ( وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية ).

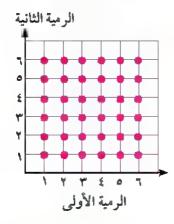
#### Tossing a die



- العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذي يظهر على
   الوجه العلوى هو :
  - ف [ ۱، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۲ ویکون: ن (ف) ٦
- ۲- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر في
   كل مرة على الوجه العلوى هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول هو ناتج
   الرمية الأولى، ومسقطها الثاني هو ناتج الرمية الثانية أى أن:
- ف = { (س، ص) : س∈ { ١، ٢، ٢، ٤ ، ٥، ٦}، ص∈ { ١، ٣، ٢ ، ٤ ، ٥، ٦} والأشكال التالية توضح ذلك .

#### 😯 صورة هندسية :

### 🕕 صورة جدولية :

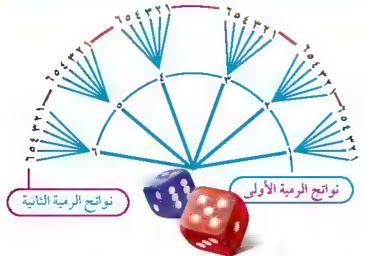


٦	٥	٤	٣	۲	\	الرمية الأولى
(141)	(0,1)	(٤،١)	(1, 7)	(1,1)	(1,1)	١ ١
(7.7)	(7, 0)	(1, 3)	(7.7)	(7,7)	(1.1)	Y
(7,4)	(7,0)	(2 .4)	(٣,٣)	(۲.7)	(1.1)	٣
(7.2)	(2,2)	(٤,٤)	(٣ ٤)	(٢.٤)	(١.٤)	٤
(7.0)	(0,0)	(2 (0)	(".0)	(4.0)	(١.٥)	0
(۲،۲)	(5.0)	(£ 47)	(٢, ٦)	(٢.٦)	(1:1)	1

ج الشجرة البيانية

#### لاحظ أن:

- ۱-ن (ف) ۱×۱ ۲۱ ۲۱ ۲۱ ۲۱
- ۲- ف = {۱، ۲، ۲، ۲، ع، ۵، ٦} × {۱، ۲، ۲، ع، ۵، ۲، }
- ٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين فى آن واحد (معًا). هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.





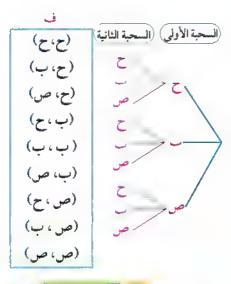
كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية ( مع الإحلال ) وملاحظة تتابع الألوان.

#### 🔷 الحل

نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة السفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور في السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) ٢٦ ٩

ف-{(ح،ح)، (ح، ب)، (ح، ص)، (ب، ح)، (ب، ب)، (ب، ص)، (ص، ح)، (ص، ب)، (ص، ص)}



#### 🚰 حاول أن تحل

ت صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سُحِبَت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.



The event

> الحدث هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهدا يعنى عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها في السحبة الثانية.

04

الحدث البسيط (الحدث الأولى) The simple event

◄ هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصرًا واحدًا فقط.

الحدث المؤكد:

The certain event

هو الحدث الذي عناصره هي عناصر فضاء العينة ف وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

الحدث المستحيل - The impossible event

هو الحدث الخالي من أي عنصر ويرمز له بالرمز 🕈 وهو حدث مستحيل أي يقع في أي مرة تجرى فيها التجربة

# مثال 🚮

عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات.

اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:

أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"

ب "حدث ظهور صورة على الأقل"

贪 الحل

من الرسم نجد أن

ف [ص، (ك، ص)،(ك، ك، ص)،(ك، ك، ك)}

ا (ك، ك، ك). (ك، ك، ص). (ك، ك، ك)} ف

ب (ك، ك، ص) (ك، ك، ص)

ج (ك،ك،ص)، (ك،ك،ك)} ج

د ١٠ ( ) الحدث المستحيل

#### 🚰 حاول أن تحل

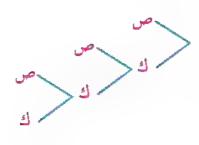
عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.

اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:

أ "حدث ظهور صورة على الأقل"

ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"

ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"



ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"

د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

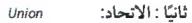
#### Operation of the events

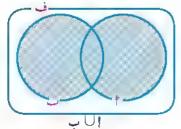
#### العمليات على الأحداث

# تعلم 🚺



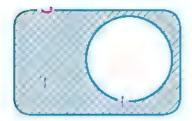






اتحاد الحدثين أ، ب هو الحدث أ ب ب الذي يحوى كل عناصر فضاء العينة التي تنتمي إلى أ أو ب أو كليهما معًا ويعني وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)

> ثالثًا: الإكمال Completion

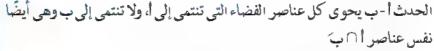


الحدث أ يسمى الحدث المكمل للحدث أ ، لذلك أ يحوى كل عناصر فضاء العينة التي لاتنتمي إلى الحدث أ، ويعني عدم وقوع الحدث أ.

لاحظ:اباً ف،ا∩اً ♦

Difference

رابعًا: الفرق

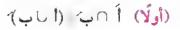


ويعني وقوع أ وعدم وقوع ب (وقوع أ فقط)



خامسًا: قانونا دي مورجان

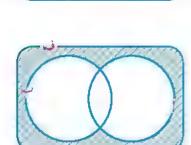
إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإن :

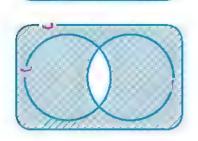


وتعنى حدث (عدم وقوع أى من الحدثين) أو (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)



و تعني حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع محد الحدثين على الأكثر."







Mutually exclusive events

#### الأحداث المتنافية

يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلاً: ١-إذا كان أ" حدث النجاح في امتحان ما" ، ب" حدث الرسوب في نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٣- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن

(1, 7, 7, 3, 0, T)

(0 ,T ,1) 1: 5i إذا كان أحدث ظهو رعدد فردي

آي: ١٠٤ (٢) ٤،٦} ب حدث ظهور عدد زوجي

فإن أ ∩ب ♦ أي وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر.

◄ يقال: إن الحدثين 1، ب متنافيان إذا كان 1 ∩ ب ♦

◄ يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذًا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.



#### لاحظ:

١- إذا كان أ ∩ب فإن أ ، بحدثان متنافيان.

و إذا كانت أ، ب، ج ثلاثة أحداث من ف وكان : أ  $\cap$  ب  $\circ$  ب  $\circ$  ج  $\circ$  أ  $\circ$ فإن: أ ، ب، ج أحداث متنافية والعكس صحيح.

٢- الأحداث البسيطة (الأولية) في أي تجربة عشوائية تكون متنافية.

٣- أي حدث أ ومكمله أ هما حدثان متنافيان.

# مثال 🚮

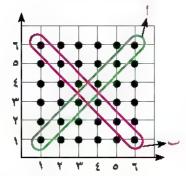
🔷 الحل

 في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها. أولاً: مثل فضاء العينة هندسيًّا واكتب كلًّا من الحدثين الآتيين.

الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧".

الحدث الشهور نفس العدد على الوجهين"

ثانيًا: هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .



أولاً : عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هي أزواج مرتبة عددها ٢٦ . ٢٦ الشكل المقابل هو التمثيل الهندسي لفضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما في الشكل.

ثانيًا: `` أ ، ب حدثان متنافيان

#### 🚹 حاول أن تحل

٤) في المثال السابق اكتب كلًّا من الحدثين الآتيين :

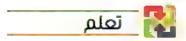
دحدث " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر"

ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوي ٥"

هل الحدثان ج، د متنافيان ؟ فسر إجابتك.

**Propability** 

الاحتمال



#### حساب الاحتمال ،

إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات، فإن احتمال وقوع أي حدث أرف يرمز له بالرمز ل (أ) حيث:

# مثال 🚳

( صحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر ، الباقي باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية:

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.

ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

#### 🗘 الحل

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء ل (1) عدد جميع الكرات المرات ١٠٠٠

احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء - ل(ج) احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء - ٢٠٠٠ ٧٠٠٠ ١٠٠٠ فكية هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

#### 🚹 حاول أن تحل

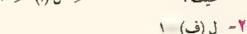
- ٥ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية:
- د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.
- هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء.

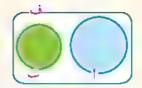


#### Axioms of probability

مسلمات الاحتمال

١- لكل حدث أ رق ف يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال الحدث أيرمز له بالرمز ل(أ) 





٣- إذا كان أرف، بررف

ل (ا ب ب) - ل (ا) + ل (ب) وكان أ ، ب حدثين متنافيين فإن :

#### من المسلمات السابقة نلاحظ:

المسلمة الأولى تعنى احتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي ينتمي للفترة [٠،١] المسلمة الثانية تعنى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد ١

يمكن تعميم المسلمة الثالثة إلى أي عدد محدود من الأحداث المتنافية

しいしょうしょう こうり こくけり - しけり - しゅう しゅう しゅうしゅう حيث إن إنه إنه عدات متنافية

#### نتائج هامة

- · ( ( ( ) ) ( \ )
- (h) (h) (t)
- (mt) t (h) t (tn ) t (tn )
- (→ ∩ 1) J (-) J + (1) J | (-, ∪ 1) J (£)

# مثال 🥌

- (٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :
  - $\mathsf{L}(\mathsf{I}) = \frac{7}{5} \cdot \mathsf{L}(\mathsf{L}) = \frac{1}{5} \cdot \mathsf{L}(\mathsf{L} \cap \mathsf{L}) = \frac{1}{5} \mathsf{L}(\mathsf{L} \cap \mathsf{L})$

- (أ ∩ أ) ع (ا
- (ا د)
- (1)3 (P) (Lul)3 (D)
  - 🔷 الحل

إذكان أرب

فإن ل(أ) كل(ب)

1  $t(1 \cup \psi)$   $t(1) + t(\psi)$   $t(1 \cap \psi)$ 

09

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر ل (١١ ب) ل (أ ب ب) ﴿

$$\frac{1}{r}$$
 الحتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (ال ب) - ل (ا ب) ع أحد الحدثين فقط = ل ال

فحين هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

#### 🚹 حاول أن تحل

# مثال 🚮





#### 🚼 حاول أن تحل

$$\mathsf{L}(\mathsf{p}) = \frac{1}{6} \cdot \mathsf{L}(\mathsf{p} - \mathsf{p}) \cdot \frac{1}{6} \cdot \mathsf{lege}(\mathsf{p})$$

#### تِمْكير ناقد:

بيّن كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ  $\bigcirc$  ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان:  $\frac{U(1)}{U(1)}$ 



#### 🚹 حاول أن تحل

ن ا فضاء عینة لتجربة عشوائیة حیث ف  $\{1 : + : +\}$  و کان (1) (1) (2) (3) (3) (4) (4) (4) (4) (4) (5) (4) (5) (6) (7) (7) (7) (8) (9) (9) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (2) (3) (4) (4) (4) (4) (4) (4) (4) (4) (5) (6) (7) (7) (8) (9) (9) (9) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (2) (3) (4

# مثال 🚮

(١٠٠٠) الربط بالبيئة المدرسية: إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان الفيزياء يساوى ٠٠،٨٠، واحتمال نجاحه في المتحانين معًا ٠٠،٨٠ أوجد احتمال:

أ نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل. الله نجاح الطالب في امتحان الرياضيات فقط.

🤫 عدم نجاح الطالب في الامتحانين معًا.

#### 🔷 الحل

لیکن أحدث نجاح الطالب فی امتحان الفیزیاء ، ب حدث نجاح الطالب فی الریاضیات فیکون : ل (أ)  $\cdot$  ,  $\cdot$  ,

ا احتمال نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل ل (أ ب ب )  $(1 - 1)^{-1}$  احتمال نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل  $(1 - 1)^{-1}$  (أ  $(1 - 1)^{-1}$  () (أ  $(1 - 1)^{-1}$ 

بُ احتمال نجاح الطالب في امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه في امتحان الرياضيات وعدم نجاحه في امتحان الفيزياء أي ل (ب أ)

(أ ∩ ب) وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب) وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب) . .. ل(أ ∩ ب) ١ ل (أ ∩ ب) ١ ٠,٢ ٠,٨ ١ ..

#### تطبيقات حياتيت:

#### 🛂 حاول أن تحل

ال للحصول على وظيفة في إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظرى، والآخر عملى، إذا كان احتمال النجاح في الاختبار النظرى ٧٠,٠ واحتمال نجاحه في الاختبار العملى ٢,٠ واحتمال النجاح في الاختبارين معًا ٥,٠ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال:

أ نجاحه في الاختبار النظري فقط. ٤ أحد الاختبارين على الأقل.

#### تِفكير ناقد:

الربط بالرياضين صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه في مباراة النهاب ٢٠٠٠ وأن احتمال فوزه في المبارتين معًا ٠٠٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال و فسر إجابتك.

# مثال 🚮

(۱) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى في كل مرة ، احسب احتمال: أولاً: أحدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوى ٤"

ثانيًا: ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر "

ثَالثًا: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوى ٢"

رابعًا: د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

🔷 الحل

ز(ف) = ۳٦

 $\frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}$ 

ثالثًا: ج $= \{(1,7), (7,1), (7,2), (3,7), (3,7), (3,7), (3,7), (3,7) \}$  نالثًا: ج $= \{(1,7), (7,2), (3,7),$ 

رابعًا: حيث إنه لايمكن أن يظهر عددان مجموعهما أكبر من ١٢، ن د  $\phi$ ، ل (د) صفر

#### 🚹 حاول أن تحل

(١٧ في المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية:

أولاً: أحدث " العددان الظاهر ان متساويان "

ثانيًا: ب حدث " العدد في الرمية الأولى فردي وفي الرمية الثانية زوجي"

# مثال 👩

الآتية: المحدث تقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية: أحدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانيًا: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثًا: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.

#### 🔷 الحل

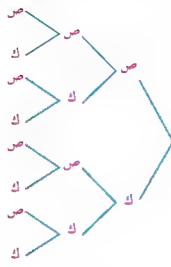
ف {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}، ن (ف) ٨

أولاً: ' أحدث ظهور صورة واحدة فقط.

١٠ [ (ص، ك، ك، ك) ، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)] - ١

<u>\*</u> (1) 」、 r (1) 」 ::

ثانيًا: " ت بحدث ظهور صورتين على الأقل، أي إما صورتان أو ثلاث صور



$$( \omega, \omega, \omega )$$
  $( \omega, \omega, \omega )$   $( \omega, \omega )$   $( \omega, \omega, \omega )$ 

ثالثًا: ". ج حدث ظهور صورتين بالضبط

$$\frac{\pi}{\Lambda}$$
 (ج)  $\mathcal{C}^{*}$  (ج)  $\mathcal{C}^{*}$  ((ج)  $\mathcal{C}^{*}$  ((ج)  $\mathcal{C}^{*}$  (خ)  $\mathcal{C}^{*}$  (ج)  $\mathcal{C}^{*}$ 

#### 🖪 حاول أن تحل

(١٣ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية:

أولاً: أحدث ظهورنفس الوجه في الرميات الثلاث تانيًا: بحدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثًا: ج حدث ظهور عدد فردى من الصور رابعًا: د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامسًا: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات.

# مثال 💣

# الارتباط بالمجتمع في أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة. وبيانا تهم موضحة بالجدول التالي:

المجموع	يتحدث الفرنسية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث العربية	
14-	70	ío	٥٠	رجل
۸۰	٥	۳.	<u>í</u> o	امرأة
۲.,	۳.	٧٥	40	المجموع

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

🕑 رجل يتحدث الإنجليزية.

🚺 امرأة تتحدث العربية.

- ع يتحدث العربية والانجليزية.
- ج يتحدث العربية أو الفرنسية.
- امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا يتحدث العربية.

#### 🔷 الحل

- ٠,٢٢٥ =  $\frac{20}{7.0}$  احتمال أن يكون المختار " امرأة تتحدث العربية " =  $\frac{20}{7.0}$
- احتمال أن يكون المختار "رجل يتحدث الإنجليزية" = ٤٥٠ مرجم ٠,٣٢٥
- ١-,٦٢٥ ٢٠٠١ أن يكون المختار "يتحدث العربية أو الفرنسية" = ٢٠٠٠ ٢٠٥٠ . ٠
  - احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية والإنجليزية" = ل (φ) = صفر
- ٠,٠٢٥ ون المختار "امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا تتحدث العربية" = ٥,٠٢٥ و٠,٠٢٥

#### 🗗 حاول أن تحل

- المختار: المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:
- 史 يتحدث الألمانية.

🛈 لا يتحدث الإنجليزية.

- د ، رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.
- ج إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية.

# تمــاريـن (۳ – ۱)

- ر يرغب طالب في شراء حقيبة ويمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بُنيًّا ، مثِّل فضاء العينة في هذا الموقف بالشجرة البيانية.
  - 💎 في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.
    - أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًّا من الأحداث الآتية.
  - > الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردي». > الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجي».
  - > الحدث ج «ظهور عدد أولى أكبر من ٢». > الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٢».
    - في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.
       عين كلًا من الأحداث التالية:
  - > الحدث أ «ظهور عددين متساويين». > الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- ◄ الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣». ◄ الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».
- ﴿ من مجموعة الأرقام (١، ٣،٣،٤) كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعيّن منها الأحداث الآتية:
  - ﴾ أحدث أن يكون رقم الآحاد فرديًا . المحدث أن يكون رقم العشرات فرديًا .
- ◄ جدت أن يكون كلا الرقمين فرديًّا. ◄ د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًّا.
- حقيبة بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على
   البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية:
- أحدث " العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠" بحدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٣" جحدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢،٥ " هـ حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢،٥ " هـ حدث " العدد المسجل أولى "
  - و حدث "العدد المسجل يحقق المتباينة ٥س ٢ < ١٧ "
- سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة
   أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ و إذا كان :
  - أحدث " العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد في السحبة الأولى"
    - ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣"
    - اكتب كلًّا من أ ، ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.
- ﴿ فَى تَجْرِبَةَ إِلَقَاءَ قَطْعَةً نَقُودَ ثَلَاثُ مَرَاتَ مَتَنَالِيةً وَمَلَاحَظَةً تَتَابِعِ الصّورِ وَالكتابَاتِ مَثّل فَضَاءَ النواتَج بشكل شَجْرى، ثم عين الأحداث الآتية :

أحدث " ظهو ركتابتين على الأقل" ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر" د حدث " عدم ظهور صورة في الرميات الثلاث " جحدث " ظهور صورة في الرمية الأولى" 🛦 ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد، مثَّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية : أحدث " ظهور كتابة وعدد زوجي" ب حدث " ظهور صورة وعدد فردى" د حدث " وقوع الحدث أ فقط " ج حدث "عدم وقوع أأو عدم وقوع ب" هـ حدث " وقوع الحدث أو وقوع الحدث ب" اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة: إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو: ± € ± € 1 3 😥 في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين. فإن احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الأولى وعدد أولى في الرمية الثانية هو: 1 P 1 3 (١) إذا سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو : <u>√</u> • <u>+</u> • 1 3 😗 يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيًّا، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًّا هو: <u>۵</u> (ع \(\frac{1}{V}\) \(\frac{V}{q}\) \(\frac{V}{q}\) (ا ب) إذا كان أ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان ب را ، ل (ا) ٢ ل (ب) ٦ , ٠ فإن ل (ا ب يساوى: ٠,٤ 🖘 (ب) ۲٫۲ ٠,٢ 🔊 ٠,٦ 🛈 (١٤) ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي: أ احسب احتمال كل من الأحداث التالية: ◄ ب "حدث ظهو ر عدد أولى." ◄ أ "حدث ظهور عدد فردي." ◄ د "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢." ◄ ج"حدث ظهور عدد زوجي." ◄ و "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد." ◄ هـ "حدث ظهور عدد مكون من رقمين." (ب) احسب: ل(أ ∪ ج) ، ل(هـ ∪ و) ، ، ل(ب ∩ د).

- إذا كان ف إأ، ب، ج، د} فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد: L(1) , L(-) , L(-) , L(-) , L(-) , L(-)
- (١٤ كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشو ائية، وكان: ل (أ ب ) ٢٠٠١ ل (أ ب) ٢٠,٠ أحسب ل (أ)، ل (ب).
- ١٤٠ كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) أن لرب بن لر(ا ∩ ب) أوجد:
  - (١٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:
  - وقوع أفقط.
     وقوع أوب.
     وقوع أوعب.
- (٩) صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائيًّا. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:
  - ليست زرقاء.
     ليست حمراء ولاصفراء. (ب) زرقاء أو صفراء. 🛈 حمراء،
- 🙌 مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشو ائيًّا ولوحظ العدد المدون عليها. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:
  - 史 عددًا يقبل القسمة على ٥ 🕕 عددًا يقبل القسمة على ٣
  - 🕒 عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥
- 🗢 عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥
- (١) ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- ◄ بحدث ظهور صورة واحدة على الأقل. ◄ أحدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ◄ دحدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل. ◄ جحدث ظهور صورة على الأكثر.
- 😙 في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي في كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- ◄ حدث مجموع العددين في الرميتين يساوي ٨ ◄ حدث ظهور العدد ٤ في الرمية الأولى.
  - ◄ حدث مجموع العددين في الرميتين أقل من أو يساوي ٥
- (٣٣ الديط بالدياضين عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصًا، منهم يشجع نادى الهلال، و٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لايشجعون أيًّا من الناديين. إذا اختير شخص عشوائيًّا من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعي:
  - أَ أُحد الناديين على الأقل. 🖳 الناديين معًا.
  - أحد الناديين فقط. 🗢 نادى الهلال فقط.

- فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، إذا كان أهو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجى . احسب احتمال وقوع كل من الحدثين أ ، ب ثم احسب حتمال كلًا من الأحداث الآتية :
  - 💛 وقوع الحدثين معًا

وقوع أحد الحدثين على الأقل

وقوع أحد من الحدثين فقط

🥏 وقوع ب فقط

- وم سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:
  - 🗨 مربعًا كاملًا

العدد ٧ مضاعفًا للعدد ٧

ليس مربعًا كاملًا، وليس مضاعفًا للعدد ٧

- ج مضاعف للعدد ٧ ومربعًا كاملاً
- إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل(ب) ا ألى ل (أ ب) . ل (أ ب)
   ل (ب أ) ، ١٥ (أ ب) ل (أ الله)، ل (أ الله) ل (أ الله)
- ﴿ كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٣٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائيًّا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :

ب زياد هو الذي كتب الخطاب.

الله أخطاء .

طارق قد أخطأ في كتابته.

🤊 زياد لم يخطئ في كتابته.

# الوحدة الثالثة



#### **Conditional Probability**

Conditional probability

ال السرطي

الشرطي

لأساسية	المصطلحات ا	سوف تتعلم	
0 الاحتمال ا	Mutually Exclusive Events	الأحداث المتنافية	٥ الأحداث المتنافية.
		أحداث غير متنافية	<ul> <li>الأحداث غير المتنافية.</li> </ul>

Events are not Mutually Exclusive

#### مقدمة:

الاحتمال الشرطي.

سبق أن درست حساب احتمال حدث ما (وليكن أ) لتجربة عشوائية، وذلك بمعرفة العلاقة بين عدد عناصر هذا الحدث ن(أ) وعدد عناصر فضاء التجربة العشوائية ن(ف) من خلال العلاقة:

Mutually Exclusive Events

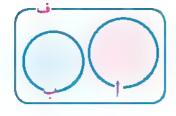
#### الأحداث المتنافية:

علمت من خلال دراستك للاحتمال بأن الأحداث المتنافية هي الأحداث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، لأن وقوع أحدها يمنع وقوع الأحداث الأخرى، الأمر الذي يعني عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها.

#### الحدثان المتنافيان،

هما الحدثان اللذان لايشتركان في أي عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ф. فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن:أ ∩ ب \_ Φ

· ل (أ رب) صفر ويكون ل (أ ب ب) - ل (أ) + ل (ب)



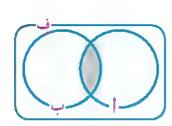
#### Events are not Mutually Exclusive

# الحدثان غير المتنافيان:

هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)

#### و يكون:

- (1) t(t∪ +)=t(t)+t(+) t(t∩ +)
  - (1) J-1-(1) J (Y)
  - $(+ \cap 1) \cup (1) \cup (1 \cap 1) \cup (1 \cap 1)$
- $(+ \cap \uparrow) \downarrow (\uparrow \downarrow) \downarrow (\uparrow \cap \uparrow) \downarrow (\xi)$
- $(\neg \cap 1) \cup (\neg \cap 1) \cup (\neg \cap 1) \cup (\neg \cap 1) \cup (\circ)$



#### Conditional Probability

الاحتمال الشرطي

إذا كان أ، بحدثين من ف فإنه في بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حدثًا ما مثل ب قد وقع، ل (ب) في هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث ب تأثير على احتمال وقوع أ و يمكن حساب احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحدث أ ونواتج الحدث ب.

مِثال تمهيدي: في تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف هو:

ف [١، ٢، ٢، ٤، ٥، ٦] ، فإذا كان الحدث [ ١] هو حدث ظهور عدد أقل من ٤

فمن الواضح أن: ل(أ)  $\frac{\zeta(1)}{\zeta(\dot{b})} = \frac{7}{7} = \frac{1}{7}$ 

وإذا كان الحدث ب (٢، ٤، ٦) هو حدث ظهور عدد زوجي.

لنتساءل الآن: إذا علمنا أن الحدث ب قد وقع بالفعل فما احتمال وقوع الحدث أ؟

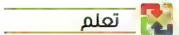
بمعنى آخر، ما احتمال الحصول على رقم زوجي أقل من ٤٤

نلاحظ أن الشرط المعطى يختزل فضاء العينة إلى لمجموعة ب [٢، ٤، ٦]

ويكون الحدث الموافق لظهور رقم زوجي هوأ ∩ ب [٢]

وبالتالى فإن الاحتمال المطلوب هو:  $\frac{U(1 \cap \gamma)}{U(\gamma)} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ 

إن هذا المثال يوضح لنا كيف أن بعض الأحداث تختلف احتمالاتها تبعًا لاختلاف فضاء العينة.



### Conditional Probability

الاحتمال الشرطي

إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ، ب حدثين من هذا الفضاء.

فإن احتمال وقوع الحدث أبشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل ( أ | ب ) ويقرأ احتمال وقوع الحدث أبشرط وقوع الحدث أبشرط وقوع الحدث التالية:

$$t(1|+) \frac{t(1 \cap \psi)}{t(\psi)} = \sin t(\psi) > 0$$

لاحظ أن: الاحتمال الشرطى يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطي) أي إن:

١ > (ا ا ب) < ١

 $1 = \frac{f(\psi)}{f(\psi)} = \frac{f(\psi)}{f(\psi)} = \frac{f(\psi)}{f(\psi)} = 1$ 

 $- \frac{1}{2}$  إذا كان أ $+ \cap \frac{1}{2} = 0$  فإن ل $- \frac{1}{2} = 0$  إب $- \frac{1}{2} = 0$  (أ $+ \frac{1}{2} = 0$  )

### مع ملاحظة أن:

- ا ل(ا إ ب) ≠ ل (ب ا ا) €
- (اب) ا درااب) مادرال اب) الدرال اب
- $\cdot < ( )$  ، ل ( أ  $\cap$  ب) ل ( أ | ب  $) \times ($  ب ) بشرط ل (ب  $) > \cdot$
- < (1) بشرط ل (1) × ل (1) بشرط ل (1) > -

# مثال 🥏

### الاحتمال الشرطي

القلي حجر نرد منتظم مرة واحدة. احسب احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجي؟

### 🚺 الحل

بفرض أَن: فضاء العينة ف – { ۱، ۲، ۳، ٤، ٥، ٦} ، أ – { ۲} ، 
$$\psi$$
 – { ۲، ٤، ٦} فإن: ل(ب)  $\frac{\pi}{7} = \frac{1}{7}$  ، ل (أ  $\psi$  )  $\psi$  ل (أ)  $\psi$ 

$$\mathcal{L}([],)-\frac{\mathcal{L}([],\psi)}{\mathcal{L}(\psi)}$$

$$\frac{1}{r} \parallel r \times \frac{1}{r} \parallel \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \parallel \frac{1}{r} \times r \parallel \frac{1}{r} \parallel$$

احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجيًا هو لل

# 🚹 حاول أن تحل

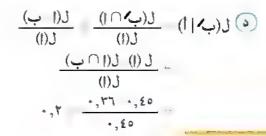
( ) أُلقَي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، ما احتمال ألّا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢٢

# مثال إدراء العمليات

### 🔷 الحل

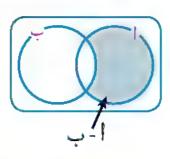
### ۱ ∵ ((ب ۱۱) <u>((ب ۱۱)</u> ۱ ∵ ( (ب ۱۱) <u>( (ب</u> ۱۱)

لاحظ أن: ل(أ | ب) ≠ ل(ب | أ)





فى الاحتمال الشرطى لاحظ أن الحدث الذى يلى كلمات "ما احتمال" هو الحدث الذى نبدأ به، والحدث الذى يلى إحدى الكلمات" علمًا بأن أ، إذا كان أ، إذا علم أ، ...) هو



ل(ب (أ ) = ل(أ (ب) ل

( ー ↑ ) 」 - ( ー ) 」 + ( ) 」

=(--1)3

ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

### 🚹 حاول أن تحل

- ﴿ إِذَا كَانَ أَ، بِ حَدَثَيْنَ مِنْ فَضَاءَ عَيْنَةَ لَتَجَرِبَةَ عَشُوائِيَةً فَ بِحِيثُ لِ(أَ) ٢٠٠٠ لِ(ب) ٢٥٠، لِ(أَ بِ) ٢٠٠٠ أُوحِد:
  - (ب ۱۱) (د ۱۲) (ک (د ۱۲) (ک

- (الراب) (الراب)
- (1) اب) ا

🥌 مثال

# الجداول التوافقية

(١٦) من بيانات الجدول التالي:

شخاص	wii 14		
يلبس نظارة لا يلبس نظارة		الحالة	
7	۸۰۰	رجل	
Y = =	٤٠٠	امرأة	

أوجد احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة ؟

### 🔷 الحل

نفرض أن: ن(ف) عدد الأشخاص موضوع الدراسة - ٢٠٠٠

أحدث أن الشخص المختار إمرأة

، ب حدث أن الشخص المختار يلبس نظارة

المطلوب هو: إيجاد احتمال أعلمًا بأن ب قد وقع أي: ل( | | ب)

احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة هو لم

### 🚹 حاول أن تحل

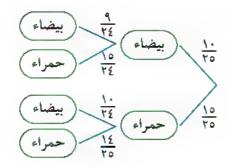
- 😙 في المثال السابق أوجد:
- أن يكون رجل اختير عشوائيًّا لا يلبس نظارة .
- أن يكون رجل أو امرأة اختير عشو ائيًا يلبس نظارة .

# مثال 🚮

### الشجرة البيانية

الله حقيبة بها ١٠ كرات بيضاء ، ١٥ كرة حمراء سحبت عشوائيًّا كرتان على التوالى دون إحلال (إرجاع) . ما احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين؟

### 🚺 الحل



نلاحظ في هذا المثال أن سحب الكرات تم على التوالى، لذلك فهو يخضع للترتيب، أى إن السحبة الثانية للكرة مشروط بحدوث السحنة الأولى. يمكن تمثيل هذا المثال بمخطط الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل الجانبي.

نفرض أن: أ ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الأولى بيضاء

ب ترمز لحدث أن تكون الكرة الثانية بيضاء

(ب [ أ) ترمز للحدث سحب الكرة الثانية بشرط أن تكون الكرة الأولى قد تم سحبها .

(أ ١ ب) ترمز للحدث سحب كرتين بيضاوين.

$$\mathcal{L}(\cdot, |\cdot|) = \frac{\Gamma(\cdot, \cdot)}{\Gamma(\cdot, \cdot)} = \mathcal{L}(\cdot, \cdot)$$

$$\frac{(\dot{\gamma} \cap \dot{\beta})}{\frac{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}}{\dot{\gamma} \circ \dot{\gamma}}} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}} \cdot \dot{\gamma}$$

$$\frac{r}{r} = \frac{1}{r} \times \frac{q}{r} = (-1) \cdot 1$$

احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين هو ج

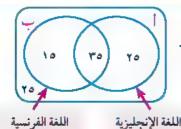
### 🚹 حاول أن تحل

٤ في المثال السابق أوجد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

# مثال الربط بالتعليم

- الله عدد الدارسين للغة الإنجليزية ١٠٠ طالبًا وعدد الدارسين للغات، فإذا كان عدد الدارسين للغة الإنجليزية ٢٠ طالبًا وعدد الدارسين للغتين معًا ٣٥ طالبًا. اختير أحد الطلاب من هذا المعهد عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب دارسًا:
  - أحد اللغتين على الأقل.
  - اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.
  - اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية.

🔷 الحل



يمكن توضيح بيانات المسألة على شكل ڤن كما هو مبين في الشكل المقابل. و بفرض الأحداث الآتية:

الطالب يدرس اللغة الإنجليزية 1

الطالب يدرس اللغة الفرنسية - ب فإن:

$$U(t) = \frac{\tau_0}{1 \cdot \tau} = \tau_0$$

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا احد اللغتين على الأقل هو ٠,٧٥

$$\frac{\zeta(1)}{\zeta(-1)} = \frac{\zeta(1)}{\zeta(-1)}$$

أي إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية هو ٧٠٠٠

$$\mathcal{L}(\frac{1}{|\cdot|}) = \frac{\mathcal{L}(\frac{1}{|\cdot|})}{\mathcal{L}(\frac{1}{|\cdot|})}$$

$$\cdot$$
, درب  $| 1 \rangle = \frac{0.7, \cdot}{7, \cdot} \simeq 1.0$ 

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية هو تقريبًا ٥٨٥٠٠.

### 🚹 حاول أن تحل

- ( ) يصوب لاعبان أ ، ب في وقت و احد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف خ ، واحتمال أن يصيب اللاعبان أ ، ب معًا الهدف خ ، أوجد احتمال :
  - أ إصابة الهدف
  - 😛 إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب.
  - الاعب أباية الهدف من اللاعب بإذا تم إصابته من اللاعب أ.

### أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

( ) في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور كتابة في الرمية الثانية إذا ظهرت صورة في الرمية الأولى تساوى:

1 3 4 6

 $(-1)^{\frac{1}{2}}$  إذا كان ل  $(1 \cap -1)^{\frac{1}{2}}$  ،  $(1)^{\frac{1}{2}}$  فإن  $(1)^{-\frac{1}{2}}$  فإن  $(1)^{-\frac{1}{2}}$   $(2)^{\frac{1}{2}}$   $(3)^{\frac{1}{2}}$ 

(i)  $\frac{1}{7}$   $\frac{1}{7}$ 

### ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(ابا) (اب) (ابا) (بارا) (بارا) (بارا) (بارا) (بارا) (بارا) (بارا) (بارا)

(أ ب) إذا كان ل(أ) عرب ، ل(ب) • , • ، ل(أ ب ب) • , • أوجد ل(أ إ ب)

إذا كان ل(ب | أ) بن ، ل(ب | أ) الن ، ث أوجد
 إذا كان ل(ب | أ) بن ، ل(ب | أ) الن أ أوجد

أَلقَي حجر نرد مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عددًا أوليًّا بشرط أن يكون العدد الظاهر عددًا فرديًّا .

فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون: أن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٢. أن العدد الظاهر على الحجر الثانى يساوى ٤، علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٢. بن مجموع العددين الظاهرين زوجيًّا علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٦.

إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان هو ٧,٠ واحتمال سفره للخارج إذا نجح هو ٦,٠ فما احتمال نجاحه
 وسفره للخارج

17 3

- (١٢) فصل دراسى به ٤٥ طالبًا منهم ٢٧ يدرسون اللغة الفرنسية ١٥٠ يدرسون اللغة الألمانية ، ٩ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًّا ، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:
  - أ مادة واحدة على الأقل من المادتين.
  - 史 يكون دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الألمانية.
  - 🥏 يكون دارسًا اللغة الألمانية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.
  - (١٤) أُلقّي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:
  - أ ظهور العدد ٢ على الوجهين معا علمًا بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما.
  - 史 ظهور العدد ٥ على الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤.
    - 🧢 عدم ظهور العدد ٣ على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.



- العبت الدوارق رُقِّمت قطاعات دائرية متساوية من ١ إلى ٨ فى لعبة الدوارة . ما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ١٤ أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ١٤ أن يستقر المؤشر عند العدد ١٤ أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى العدد ١٤ أن يستقر المؤشر عند العدد ١٤ أن يستقر المؤشر عند العدد ١٤ أن يستقر المؤسّر عند العدد عدد فردى العدد العدد
- (10) يبين الجدول التالي أعداد الفرق الرياضية المشاركة في الألعاب الرياضية المختلفة:

كرة الهوكي	كرة السلة	الكرة الطائرة	كرة القدم	كرة اليد	اللعبة الرياضية
٣	٧	٦	١٠	٤	عدد الفرق المشاركة

إذا اختيرت إحدى هذه الألعاب عشوائيًّا فما احتمال أن تكون من ألعاب:

- 1 كرة الهوكى علمًا بأنها ليست من ألعاب الكرة الطائرة.
- 史 كرة السلة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم وليست من العاب كرة اليد .
- (١٦) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٢٠ طالبًا و٢٠ طالبة للمشاركة في الإجابة عن الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت إجاباتهم على النحو التالي:

المجموع	غير مـتأكد	,	نعم	الإجابة
۳.	٤	٦	7.	طلاب
۲.	۲	٣	\0	طالبات

فإذا اختير أحد أفراد العينة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الشخص المختار "طالبة" إجابتها نعم

- الله صندوق يحتوى على ٥ كرات بيضاء ، ٧ كرات سوداء. سُحبت كُرتان منه على التوالى دون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد احتمال:
  - أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الكرة الأولى بيضاء.
    - 史 أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء.
    - 🧢 أن تكون الكرة الثانية سوداء و الكرة الأولى بيضاء.

(۱) يتنافس كريم وزياد في الترشح لرئاسة اتحاد طلاب المدرسة ضمن ثلاثة صفوف دراسية، والجدول التالي يمثل الأصوات التي حصل عليها كل منهم:

المجموع	الصف الثالث	الصف الثاني	الصف الأول	
0	14.	٧٧٤	197	كريم
02.	140	170	45.	زیاد

فإذا اختير طالب من طلاب المدرسة عشوائيًّا فما احتمال أن يكون الطالب:

- أ انتخب المرشح "كريم" علمًا بأنه من طلاب الصف الثالث؟
  - 💛 انتخب المرشح "زياد" علمًا بأنه من طلاب الصف الثاني ؟
  - (٩) أُعلن عن وظيفة تقدم لها ١٠٠ شخص، رُتبت بياناتهم كالآتي:

غير مؤهلين			Ŋ.	مؤهلون	
أعزب	متزوج		أعزب	متزوج	
14	٣	ا ذکر	١.	٤٠	ذكر
٥	1.	أنثى	۸.	٨-	أنثى

- احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون مؤهلًا.
  - 🗨 احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا ومؤهلًا.
- احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون غير مؤهل.
- ﴿ فَى اختبار آخر العام وجد أن ٣٠٪ من الطلبة رسبوا في الكيمياء، ٢٠٪ رسبوا في الفيزياء ، ١٥٪ رسبوا في الكيمياء والفيزياء. اختير أحد الطلبة عشوائيًّا.
  - 1 إذا كان الطالب المختار راسبًا في الكيمياء، فما احتمال رسوبه في الفيزياء؟
  - إذا كان الطالب المختار راسبًا في الفيزياء، فما احتمال رسوبه في الكيمياء؟
    - 🥏 أوجد احتمال رسو به في الكيمياء بشرط عدم رسو به في الفيزياء؟
      - 🕒 أوجد احتمال نجاحه في الفيزياء بشرط نجاحه في الكيمياء؟

### (٢) نستياطين استخدام شكل ڤن:

أ، ب حدثان في فضاء العينة ف حيث ل(أ) - ٧,٠٠ ل (ب) - ٤٠٠٠ ل (أ ∩ ب) - ٢٠٠٠

- مَثّل المجموعات السابقة بشكل قن واكتب على الرسم احتمالات وقوعها .
  - 史 أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أولًا: وقوع الحدث أبشرط عدم وقوع الحدث ب.

ثانيًا: وقوع الحدث ببشرط عدم وقوع الحدث أ.

# الأحداث المستقلة

المصطلحات الأساسية

سوف تتعلم

٥ الأحداث غير المستقلة

٥ الأحداث المستقلة

الأحداث المستقلة.

Dependent Events

Independent Events

الأحداث غير المستقلة .

# مکر و ناقش



### تأمل الأمثلة الآتية:

- إلقاء قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة.
- ٢- نجاح طالب في مقرر الرياضيات ونجاحه في مقرر الكيمياء.
- ٣- سُحبت كرة عشوائيًّا من كيس به ١٠ كرات ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية.
  - خجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء.
  - ٥- سَحْبُ كرة عشوائيًا من كيس به ١٠ كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية.

ماذا تلاحظ؟

### نلاحظ من الأمثلة الثلاثة الأولى أن:

- النواتج في قطعة النقود لا تؤثر في النواتج في حجر النرد.
- ٢- نجاح الطالب في الرياضيات أو رسوبه فيها لا يؤثر في نجاحه أو رسوبه في الكيمياء.
- إعادة الكرة الأولى إلى الكيس بعد سحبها لا يغير من عدد الكرات، وبالتالي فإن السحبة الأولى لا تؤثر في السحة الثانية.

### لذلك فإن الأحداث في كل مثال من الأمثلة الثلاتة السابقة تُعرف بالأحداث المستقلة.

- خجاح الطالب في الامتحان العملي للفيزياء يؤثر في نجاحه في مقرر الفيزياء.
- عند سحب كرة من كيس دون إعادتها إليه يؤثر في عدد الكرات الموجودة في الكيس، وبالتالي فإن السحبة الأولى تؤثر في السحبة الثانية.

### لذلك فإن الأحداث في المثالين (٤) ، (٥) تعرف بالأحداث غير المستقلة

الحدثان المستقلان

تعلم



يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل (أ  $\cap$  ب) = ل (أ)  $\times$  ل (ب).



أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا في احتمال وقوع الحدث الثاني.

٥ آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الأبوات المستخدمة

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ، ب مستقلين وكان ل(ب) لم صفر

فإن ل (أ | ب) ل (أ) أي إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

فمثلًا: أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرتين ولوحظ تتابُع حدوث الصورة والكتابة ،

فإن: ف (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

لذا فإن احتمال أي من تلك النتائج

بفرض أن الحدث أيمثل ظهور الكتابة في المرة الثانية \_ ((ص ، ك) ، (ك ، ك) }

والحدث ب يمثل ظهور الصورة في المرة الأولى [(ص ، ص) ، (ص ، ك)]

$$d_{1}(t) = \frac{1}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = t(1)$$

أى إن حدوث الحدث ب لم يؤثر على احتمال حدوث الحدث أ بمعنى أن احتمال أ لا يعتمد على معلومية أن الحدث ب، قد وقع لذا نقول إن الحدثين أ، ب مستقلان.

لاحظ أن: الحدثين المتنافيين أ، ب يكونان مستقلين إذا و إذا فقط ل (أ) × ل (ب) - صفر

بمعنى إذا وإذا فقط كان احتمال أأو احتمال ب مساويًا صفر.



🕦 في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد. ما احتمال ظهور صورة والعدد ٥٠

يمكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة فضاء العينة: نلاحظ أن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج العينة لإلقاء حجر النرد، لذلك فإن الحدثين مستقلان. وبفرض أن:

ا حدث ظهور صورة. فإن ل (1) 
$$= \frac{1}{7}$$
 ، ب حدث ظهور العدد ٥. فإن ل (ب)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1$$

ملاحظتن يمكن إيجاد احتمال ظهور صورة والعدد ٥ مباشرة بكتابة فضاء العينة

كما هو موضح بالشكل التالي:

ف [ (ص ، ۱ ) ، (ص ، ۲ ) ، (ص ، ۲ ) ، (ص ، ۲ ) ، (ص ، ۵ ) ، (ص ، ۲ ) ، (ك ، ۲ )

((는, 이) ((는, 기))

ويكون احتمال ظهور صورة و العدد ٥ لي حدث ظهور صورة والعدد ٥ [(ص ، ٥)]

📊 حاول أن تحل

(١) في المثال السابق أوجد احتمال ظهور كتابة وعدد أولى ؟

# مثال 👩

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) م٠٠٠ ل(ب) - ٢٠٠١ ل(أ ∪ ب) م٠٠٨.
 بين مع ذكر السبب هل أ، ب حدثان مستقلان؟

### 🔷 الحل

من (١)، (٢) يكون أ، بحدثين مستقلين.

لاحظ أن: لإيضاح الفرق بين الحدثين المتنافيين والمستقلين نأخذ المثال التالي:

نعلم أنه عند إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف [ص، ك]

 $\frac{1}{7} = (2)$  کما نعلم أن ل (ص)  $\frac{1}{7}$  ، ل (ك)

ونعلم أيضًا أن الحدثين ص ، ك حدثان متنافيان لأن حدوث أحدهما ينفى حدوث الآخر .

 $(4) \times (0) + (0) + (0) + (0) + (0) + (0) + (0)$  ل (ك) خال (ك)

أى أنه ص، ك حدثان متنافيان إلا أنهما غير مستقلين.

### 🚰 حاول أن تحل

﴿ إِذَا كَانَ أَ، بِ حَدَثِينَ مِنْ فَضَاءَ عَينَةُ لَتَجْرِبَةً عَشُوائِيَةً فَ حَيثُ فَ ﴿ ١ ، ٢ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكان أ ﴿ ٢ ، ٢ ، ٥ ، ٦ } هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟ وضح ذلك.

# مثال 🧀

- الربط بالتأمين أمَّنَ رجل وزوجته على حياتيهما في إحدى شركات التأمين على الحياة فإذا قدرت الشركة احتمال أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عامًا هو ٢٠ واحتمال أن تعيش زوجته أكثر من نفس المدة ٣٠ أوجد احتمال أن:
  - الناسية الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا.
    - 🔫 يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا.

### 🗘 الحل

نفرض أن: أحدث أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عاماً ل(أ) ٠,٢ ،

ب حدث أن تعيش الزوجة أكثر من ٢٠ عاماً ل (ب) ٠,٣

🕕 احتمال أن يعيش الرجل و زوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا 🏿 ل (أ ∩ ب)

احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا ل(أ ل ب)

٠,٤٤ ١,٠٦ ١,٠١٠ ل (أ ب ل (أ ب ب ) ك ل (أ ب ) ك الم ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ك

### 🚹 حاول أن تحل

- الربط بالرمايتن أطلق جنديان أ ، ب قذيفة نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب أ الهدف هو ٦٠٠٠ وكان احتمال إصابة ب نفس الهدف ٥٠٠ أوجد احتمالات الأحداث الآتية:
  - آ إصابة الهدف من الجندي أوالجندي ب معًا. ب إصابة الهدف بقذيفة واحدة على الأقل.
    - 🧢 إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط.

# مثال 🚮

- السبحب مع الإحلالي كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرة عشوائيًا ثم أُعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية، ما احتمال أن تكون:
  - 1 الكرتان حمراوين في المرتين؟ الكرتان زرقاوين في المرتين؟
  - الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟
     الكرة الأولى حمراء والأخرى زرقاء؟

### 🔷 الحل

ا طالما أن سحب الكرة مع الإحلال (الإرجاع) فيكون الحدثان مستقلين. و بفرض أن: ف فضاء العينة ، أ سحب الكرة في المرة الأولى ، ب سحب الكرة في المرة الثانية  $\frac{3}{1}$  .  $\frac{3}{1}$  ،  $\frac{3}{1}$ 

بنفس الطريق السابقة يكون:

- $\frac{9}{100}$  احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في المرتين  $\frac{7}{100}$  ×  $\frac{7}{100}$  احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في
- $\frac{7}{70} = \frac{72}{100} = \frac{7}{100} \times \frac{2}{100} \times \frac{2$
- احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء

 $\frac{17}{70} = \frac{\cancel{\xi}}{\cancel{1}} \times \frac{7}{\cancel{1}} + \frac{7}{\cancel{1}} \times \frac{\cancel{\xi}}{\cancel{1}} =$ 

### 🚹 حاول أن تحل

(٤) إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (أ) يساوى ٨٤. • واحتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (ب) يساوى ٧٠. • ما احتمال أن يرتفع مؤشر سوقى أسهم الدولتين أ ، ب؟

Dependent events الأحداث غير المستقلة

یکون أ، بحدثین غیر مستقلین إذا كان: لرا∩ب) لرا)×ل (ب) لأننا نعلم من تعریف الاحتمال الشرطي أن:

$$U(1 \mid \psi)$$
 بشرط  $U(\psi) \neq \psi$ 

$$\cdot \neq (1)$$
 بشرط ل  $(1) \neq 0$ 

$$-$$
 ل (ب | 1) × ل (1) بشرط أن ل (1)  $\neq$  - ، ل (ب)  $\neq$  .

بمعتى أن الحدثين 1، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

### احتمال الأحداث غير المستقلة

### مثال 🚮

◊ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف - (١، ٢، ٢، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨) وكان أ - (١، ٢، ٤، ٨)، ب (۲، ۵، ۲، ۷) هل أ، ب مستقلان؛ وضح جابتك.

### 👣 الحل

$$\frac{1}{7} - \frac{\xi}{\Lambda} = (-1)J \stackrel{\cdot}{\cdot} \cdot (-1)J \stackrel{$$

$$(1) \qquad \frac{1}{2} = (1) \rightarrow (1) \rightarrow (1) \rightarrow (1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}$$

من (۱)، (۲) ل (أ  $\cap$  ب)  $\neq$  ل(أ)  $\times$  ل(ب) لذلك فإن أ، بحدثان غير مستقلين.

### 🚰 حاول أن تحل

(٥) إذا كان ج ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٧ } هل ب ، ج مستقلان ؟ وضح اجابتك.

### السحب بدون إحلال

# مثال مثال

٦ كيس يحتوى على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:

### 贪 الحل

هذا المثال هو نفس مثال (٣) باختلاف أن سحب الكرات بدون إحلال (دون إرجاع) ، لذلك يكون الحدثان غير مستقلب.

اذا كانت الكرتان حمراوين فإن:

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء-

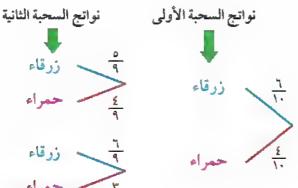
احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء ×احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى 7 · 4 × 2

# $\frac{1}{4}$ في الكرتان زرقاوين فإن: احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية زرقاء $\frac{7}{1}$ ج $\frac{9}{9}$

(7)

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء -

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بشرط أن تكون الأولى حمراء ملى المراء على المراء على المراء الأولى الأولى عمراء على المراء المراء على المراء المر



يمكن استخدام الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل لإيجاد نواتج الأحداث غير المستقلة.

### 🚹 حاول أن تحل

- ر كيس يحتوي على ٢ كرات حمراء و ٥ كرات سوداء إذا شُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:
- ا الكرتان سوداوين؟ بالأولى سوداء والثانية حمراء؟ ﴿ إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟

# تمـــاريــن ۳ ــ ۳ 🌺

- 🕦 أي من الأحداث التالية مستقلة وأيها غير مستقلة؟ فسر إجابتك:
  - 🚺 إلقاء قطعة نقود معدنية ، ثم إلقاء حجر نرد مرة واحدة.
- 🖵 سحب بطاقة من صندوق بدون إحلال ، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.
- (ج) سحب بطاقة من صندوق مع الإحلال ، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.
- تأهل فريق كرة القدم إلى دور الأربعة ، فإذا ربح فسوف يلعب في مباراة البطولة.
  - (ع) اختيار أحد الأسماء بالقرعة دون إحلال (إرجاع) ، ثم اختيار اسما آخر.
- 🥑 اختيار كرة من كيس ووضعها في مكان آخر، ثم اختيار كرة أخرى من نفس الكيس.
- ز تقدم كريم في المسابقة الثقافية يوم الاثنين ونجح فيها، وتقدم للمسابقة العلمية يوم الخميس ونجح فيها أيضا.

### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- 🔻 إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان لـ(ا) ٢٠٠٠ لـ(ب) ٢٠٠٠ فإن لـ(ا ب ب)
- ٠,٨٠٠ ٠,١٢ ا

	(-	، درب کرو، فار درا د	ستقلين و کال ل(۱) ۲۰۰۰ ۲۰	الم إذا كان اء بحديين م
	٠,٦٥ (٥)	٠,٣ 🖘	٠,١٥ (ب	٠, ١ (1)
	- ۷۲, - فإن س تساوى:	ل(ب) س ، ل(أ · ب)	ستقلين وكان ل(أ) ٢٠,٠،	(٤) إذا كان أ، بحدثين م
	د, ۲	· , £ 🔄	٠,٢٨ 💬	٠,٢٤ 🕦
	العدد ٣٣	فما احتمال ظهور صورة و	أُلقَي حجر نرد مرة واحدة.	(٥) إذا أُلقيت قطعة نقود ثم
				ع إذا أُلقيت قطعة نقود أرب
ىل1، ب				😿 أُلقَي حجر نرد منتظم مر
	_			حدَّثان مستقلان؟ فسر إ
مة ل (أ)	ا ب) ٥٠٠٠ أوجد قي	ئية وكان ل(ب) ٢٠٠٣. لـ(	فضاء عينة لتجربة عشوائ	🛦 إذا كان أ ، بحدثين مز
				إذا كان أ، ب:
			😛 حدثين مستقلين .	🚺 حدثين متنافيين.
اختيرت	خضراء واحدة زرقاء.			۹ يحتوي كيس على مجم
		نية. اوجد احتمال إن تكور		
متمال أن	ت بلية ثانية ، أوجد اح	مدة بدون إحلال ثم اختيره	اختيرت عشوائيًّا بلية و ح	😥 في السؤال السابق: إذا
				تكون الأولى زرقاء والثا
رت كرة	رقاء و ٥ خضراء. اختي	برتقالية ، ٣ صفراء ، ٣ ز	ات التالية: ٦ حمراء ، ٤ .	🕦 يحتوي كيس على الكر
			رجاع) ثم اختيرت كرة ثاني	45-
			الكرات المسحوبة:	أوجد احتمال أن تكون
	🕲 برتقالية و زرق	🤊 حمراء و حمراء.	🙂 حمراء و صفراء.	🛈 حمراء و زرقاء.
هو ٤٠٠	الجندي الأول الهدف	فإذا كان احتمال أن يصيب	للقة واحدة نحو هدف ما ،	😗 يصوب جنديان ا، ب ط
			دى الثاني الهدف هو ٧,٠.	واحتمال أن يصيب الجن
				أولًا: أوجد احتمال أن:
	هدف على الأقل.	ب يصيب أحدهما ال	ىدف معًا.	ل يصيب الجنديان اله
	هدف على الأكثر.	ىصيب أحدهما ال	لم الهدف.	ج يصيب أحدهما فقع
د أصاب	كون الجندي أ فقط ق	دف، فأوجد احتمال أن يُـ	هما على الأقل أصاب له	ثانيًا: إذا علمت أن أحد
				الهدف.
	أيضا مستقلا	واج الأحداث الآتية يكون	تقلان فاثبت أن كل من أز	🥡 إذا كان أ، ب حدثان مس
		_	<b>ب</b> 1، ب	_
		•	•	

# المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية Random Variables and Probability Distributions

الوحدة

٤

مقدمة الوحدة

سبق أن درسنا التجربة العشوائية وبعض مفاهيم الاحتمالات، وفي كثير من الحالات نرغب في التعامل مع قيم كمية (عددية) مرتبطة بنتائج للتجربة العشوائية والتي تكون في بعض الحالات أداداً أداداً

<mark>ص</mark>فات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا، وفي هذه الحالة

ن<mark>ق</mark>وم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تُسمى بالمتغير العشوائي والتي تستخدم للتعبير عن نتائج التجرية العشوائية، وسوف ندرس في هذه الوحدة نوعين من المتغيرات العشوائية وهما ·

- ♦ المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables
- ♦ المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variables

كما سندرس كذلك دوال التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية والتي تنقسم إلى·

- 🕨 دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Probability Distribution Function of Discrete Random Variable
  - Probability Density Function (دوال الكثافة) Probability Density Function

### أسدانك الوحدة



### في نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- وائي، ويُميز بين المتغير العشوائي 🛚 🖨 يتعرف مفهوم المتوسط (التوقع) والتباين.
- 🗗 يستنتج الانحراف المعياري لمتغير عشوائي
  - 🖶 يعين معامل الاختلاف.
  - 🖶 يتعرف التوزيعات المتصلة.
- تتعرف مفهوم المتغير العشوائي، ويُميز بين المتغير العشوائي المتقطع ( المنفصل) والمتصل .
- تعرف مفهوم دالة الكثافة لمتغير عشوائى متصل ويعرف خواصها ويستخدمها في حساب احتمال وقوع قيمة المتغير العشوائي داخل فترة معينة



### الوحدة الرا<mark>بعة</mark>

1 - 2

# المتغير العشوائي المتقطع

المصطلحات الأساسية

المتغير العشوائي المتقطع

Random Variable

المتغير العشوائي

### Random Variable

المتغير العشوائي المستمر

التوزيعات الاحتمالية

#### سوف تتعلم

المتغير العشوائي المتصل المتغير العشوائي مالمتغير العشوائي المتقطع

4التوزيعات الاحتمالية

Probability Distributions

Continuous Random Variable

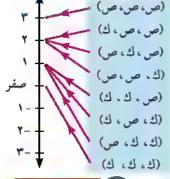
Discrete Random Variable

مقدمة: سبق أن درست التجربة العشوائية، وأمكنك إيجاد فضاء العينة لها، وفي هذا الدرس سوف نتعرف متغيرًا جديدًا مرتبطًا بهذه التجربة العشوائية وهو المتغير العشوائي.

وسوف ندرس في هذا الدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما.

### المتغير العشوائي:

في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة ف يتحدد كما في الشكل المقابل. فإذا طُلب في هذه التجربة إيجاد «عدد الصور» التي تظهر في فضاء العينة ف فإننا نرسم مخططًا يظهر العلاقة بين ف (كمتغير مستقل)، وعدد الصور وهو عدد حقيقي ح «كمتغير تابع» وهذه العلاقة تعبر عن دالة، وتكتب رمزيًّا كالآتي: سم: ف ← ح حيث سم يرمز إلى المتغير العشوائي.



المتغير العشوائي هو دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

تتحدد الدالة بالآتى: المجال ويكون مدى المتغير العشوائي سه في المثال السابق [٠، ١، ٢، ٢] ♦ المجال المقابل

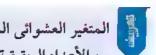
المعنف أن المتغير العشوائي يجزئ فضاء العينة ف إلى أحداث متنافية، كل حدث منها يرتبط بعدد حقيقي، وهذا الارتباط يُعبر عن دالة سم من فضاء العينة ف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

◄ قاعدة الدالة

Discrete Random Variable

### المتغير العشوائي المتقطع



المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل أو الوثاب): مداه مجموعة محدودة (منتهية) أي قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

### ومن أمثلة ذلك:

◄ عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد في اكتتاب شركة مساهمة.

 آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب. الأنوات المستخدمة ◄ عدد الحوادث على إحدى الطرق السريعة خلال أسبوع.

◄ عدد المكالمات التليفونية الصادرة لأسرة خلال شهر.

### المتغير العشوائي المتقطع



فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متنالية، إذا كان المتغير العشوائي سم يعبر عن «عدد الصور عدد الكتابات » اكتب مدى المتغير العشوائي.

### ♦ الحل

ف {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

س .: عدد الصور - عدد الكتابات	فضاء العينة ف
* *	(ص، ص، ص)
1.1 4	(ص، ص، ك)
1 1 4	(ص، ك، ص)
1 7 1	(ص، ك، ك)
1 1 7	(ك، ص، ص)
1 1 1	(ك، ص، ك)
1 7 1	(ك،ك،ص)
۳ ۴ ۰	(일 : 일 : 일)

مدى المتغير العشوائي [٣:١:١،٣]

### 🚹 حاول أن تحل

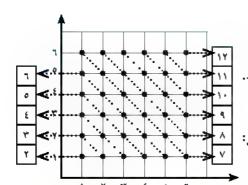
(١) في المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائي الذي يعبر عن: عدد الصور × عدد الكتابات.

# مثال المتغير العشوائي المتقطع

(٢) أُلقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، أوجد المتغير العشوائي الذي يعبر عن مجموع العددين الظاهرين.

س. مجموع	فضاء العينة ف
العددين	
v	(5 17) (7 18) (7 10) (1 17)
	(7,1),(1,7)
۸	( 7, 7), (0, 7), (3, 3), (7, 0)
^	(7.7).
٩	(1, 7), (0, 3), (3, 0), (7, 7)
١.	(7 , 2) , (0 , 0) , (2 , 7)
11	((۲، ۰)، (۰، ۲)
14	(ר , ד)

س. مجموع العددين	فضاء العينة ف
۲	(۱،۱)
٣	(1 , 7) , (7 , 1)
٤	(" ، ۱) ، (" ، ۲) ، (" ، ۳)
٥	(3,1), (7,7), (7,7), (1,3)
٦	(0,1),(3,7),(7,7),(7,3),(1,0)



من الجدول السابق نجد أن مدى المتغير العشوائى سر (۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۲، ۷، ۸، ۹، ۱۸، ۱۲ ) مكن استخدام الشكل الجانبي لإيجاد مدى المتغير العشوائي سر.

### 🚹 حاول أن تحل

فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائي الذي يعبر عن:
 «أكبر العددين الظاهرين».

### التوزيعات الاحتمالية

دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Probability Distribution Function of Discrete Random Variable



إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه المجموعة:  $\{ س، ، س، ، س، ، س، ، سر <math>\}$  فإن الدالة د المعرفة كالآتى: c(m, j) = b c(m, j) = b c(m, j) = b

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائي سـ والذي يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ [ (س، ، د(س،)) ، (س، ، د(س،)) ، (س، ، د(س،)) ........ ، (سن ، د(سن)) }

ملاحظة يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سد في صورة جدول كالآتي:

سن	,,,,,,	۳۰۰	۲0"	\u	' سس
د(سن)	D1 1 D D 1	د(سه)	د(سع)	د(س))	د(سیر)

و يلاحظ أن الدالة د في التعريف السابق تحقق الشرطين الآتيين.

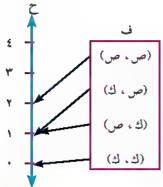


🔷 الحل

۱- د(سي ) ≥ ٠

### دالة التوزيع الاحتمالي

ت أُلقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر ، اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سد الذي يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.



ف {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)} نجد من الشكل الجانبي أن مدى المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد ظهور صورة = {٠١، ٢، ٢}

$$\frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{-1})\dot{j}}{(\dot{b})\dot{j}} - (\sqrt{-1})\dot{j} - (\sqrt{-1})\dot{j} - (\sqrt{-1})\dot{j}$$
د(٠)

$$\frac{1}{\zeta(w-1)} = \frac{\zeta(w-\gamma)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{2}$$
,  $c(7) = \zeta(w-7) = \frac{\zeta(w-\gamma)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{2}$ 

وتكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

۲	١	*	سی
1/2	<u>Y</u>	1/2	د(سر)

### 🚰 حاول أن تحل

ت في المثال السابق اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم الذي يعبر عن: (عدد مرات ظهور الصورة عدد مرات ظهور الكتابة).

# مثال السحب دون إحلال

عسندوق به ٥ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ ، سُحبت منه بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالي لكل من المتغير العشوائي الذي يعبر عن أصغر العددين على البطاقتين المسحو بتين.

### 🔷 الحل

طالما أن سحب البطاقات يتم بدون إرجاعها إلى الصندوق ، فإن البطاقة التي تسحب لا تتكرر ثانية. بمعنى أن أزواج البطاقات التي تحمل الأرقام (١،١)، (٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)، (٥، ٥) لا تكون ضمن فضاء العينة كما هو موضح بالشكل المقابل.

ن(ف) ۲۰

من الشكل المقابل نجد أن مدى المتغير العشوائي سم هو:

س (۱، ۲، ۳، ٤) وأن:

د(۱) ل (س ۱۰) د (۱)

د(۲) ل (س-۲) ا

د(۲) ل (س ۲۰) ا

د(ئ ل (س غ ع الله

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم يعطى كما بالجدول الآتي:

٤	٣	۲	١	سر
<del>**</del>	£ 7.	7.	<u> </u>	د(سـر)

### 🚹 حاول أن تحل

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة . أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.



# مثال مثال

### استخدام قاعدة الدالة

و إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة:

د(س) =  $\frac{2+7}{72}$  حيث س = ۱،۱،۲ فأوجد قيمة ك ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي.

🔷 الحل

$$c(7) = U(\sim 7) = \frac{2+3}{72} \quad c(7) = U(\sim 7) = \frac{12+7}{72}$$

لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالي نوجد:

ن دالة التوزيع الاحتمالي هي:

٣	٣	١	,	سىر
9 75	<u>V</u> 7£	<u>0</u> 7£	75	د(ســر)

### 🚼 حاول أن تحل

(س) إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه (۱، ۲، ۲) ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة د(س) اس وأوجد قيمة أ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي.

# تمــاريـن ٤ – ١

### أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

🕦 أيٌّ من الدوال الآتية تمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم:

9	٣	١	٠	(ب) سر	٤	٣	۲	١	سر	(1)
٠,٢	٠,٤	٠,٣	۵ , ۲	د(ســر)	-, 17	~,£Y	-,10	*,*1	د(سر)	
٦	۵	٤	٣	د سی	۲	١	١	۲	سرر	?
٠,١٨	٠,١٧	٠,٣٢	-, ٢٣	د(س_ر)	٠,٣١	٠,٢٣	٠,١٤	-, 47	ر د(سي)	

﴿ إِذَا كَانَ سِمَ مَتَغِيرًا عَشُوائيًّا مِدَاهُ { ٠ ، ١ ، ٢ } ، فإن جميع الدوال الآتية لا تمثل دالة التوزيع الاحتمالي له ماعدا الدالة:

$$\frac{1}{r} (\omega) = \frac{1}{\Lambda} (\omega) \cdot \frac{1}{r} (\omega) \cdot \frac{1}{r} (\omega) \cdot \frac{1}{r} (\omega) \cdot \frac{1}{\Lambda} (\omega) \cdot \frac{1}{r} (\omega) \cdot$$

(سے ۱۰) ۱۰،۲ (سے ۱۰) ۱۰،۲ (سے ۱۰) ۱۰،۲ (سے ۱۰۰۰ درسے ۱۰،۲ درسے ۱۰

( ) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وكان سه هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن:

«عدد الصور عدد الكتابات» فإن مدى سه هو:

آإذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه ﴿ ، ١ ، ٢ } ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة: د(س) أس فإن قيمة أتساوى:

### ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

👽 الجدولان الأتيان يبينان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم، أوجد قيمة أفي كل جدول:

						_			
۲ ۱ .	١	سر ۲	رب	٣	۲	۲	١	سر	1
1 1 7 - , 7	* +,*	د(سی)		İ۳	İr	İ۲	1	د(سر)	
				٤	٣	١	4	س.,	7
				İ۳	*14	*  ۲	1	د(سر)	

- إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه (٠،١،١،٢) وكانت قيم ل (سـ ٠) ٠,٢، ل (سـ ١)
   ٢٠,٢٣ ل (سـ ٢) ٢٧,٠ فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.
  - (ع) إذا كانت قيم المتغير العشوائي سه في تجربة عشوائية هي: ٢،٠،٢، ٤ باحتمالات قدرها  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{6}$  الترتيب فأوجد قيمة م ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير سه.
    - 🤢 إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالي يتحدد بالعلاقة:

 $c(m) = \frac{11 + \frac{\eta_m}{20}}{20}$  ومدى سه  $\{1, 2, 3, 3\}$  أوجد قيمة أوا كتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير سه.

- (س) إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالي يتحدد بالدالة د(س) ك + ٣سن. حيث س ١، ٢، ٢، ٤ فأوجد قيمة ك، ثم اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير سه
- (۱۲) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن « عدد الصور عدد الكتابات » فاكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير سـ
- (۱۳) صندوقان بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ۳ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيًّا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى سم بأنه « مجموع العددين » الموجودين على الكرتين المسحوبتين. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم.
- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوى في كل مرة ، اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم الذي يعبر عن « أصغر العددين الظاهرين ».
- (10 صندوق به ٤ كرات مرقمة من ١ الى ٤ ، سحبت منه كرتان واحدة بعد الأخرى (مع الإحلال) . اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سه الذي يعبر عن « المتوسط للرقمين على الكرتين المسحوبتين ».
- إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يعبر عن عدد البنات في أسرة لديها ثلاثة أطفال ، اكتب مدى المتغير العشوائي سم ، و إذا فرضنا أن احتمال إنجاب ولد يساوى احتمال إنجاب بنت بفرض عدم وجود توأم. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سم « يراعي ترتيب الأولاد والبنات ».

# التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائب المتقطع

#### Expectation and Variance of a Discrete Random Variable

	المصطلحات الأساسية		سوف تتعلم
معامل الاختلاف:	م التوقع (المتوسط)	الانحراف المعياري	التوقع (المتوسط)
Coefficient of Variation	Expectation(Mean)	معامل الاختلاف	لتباين 🗢
	Variance التباين		

مقدمة: لتحديد صفات التوزيع الاحتمالي (أي تحديد صفات المجتمع الأصلي أو للمقارنة بين المجتمعات المختلفة) فإنه يلزمنا بعض المعالم الأساسية لقياس القيمة المتوسطة لها وهي القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي وتعرف بالتوقع (المتوسط)، وهناك أيضًا قيم أخرى تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي عن قيمة المتوسط تعرف بالتباين . لذلك فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية.

### التوقع (المتوسط): Expectation (Mean)

التوقع هو القيمة التي تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائي و يسمى أحيانًا « المتوسط » و يرمز له بالرمز (لل) و يقرأ (ميو).

فإذا كان سه متغير عشوائيًّا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالي له هي د ومداه هو:  $\{ m_i : m_i : m_i \}$  باحتمالات د $\{ m_i \}$  ، د $\{ m_i \}$  ، د $\{ m_i \}$  ،  $\{ m_i \}$  ، د $\{ m_i \}$  ، د $\{ m_i \}$  ،  $\{ m_i \}$  ، د $\{ m_i \}$  ،

أى أن: التوقع ( $\mu$ ) س  $_{1} \times c(m_{1}) + m_{2} \times c(m_{3}) + m_{3} \times c(m_{5}) + m_{5} \times c(m_{5})$ 



١٠ إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

٣	۲	1		١	سس
٠,٢	†	٠,١	٠,١	٠,٣	د(سر)

أولًا: أوجد قيمة أ ثانيًا: أوجد التوقع (المتوسط)

### 🔷 الحل

أولًا: نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى الواحد الصحيح

الأدوات المستخدمة ٥ آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ثانيًا:

$$\mathbf{z}_{i}^{\mathbf{z}}$$
 التوقع ( $\mathbf{\mu}_{i}$ ) د ( $\mathbf{w}_{i}$ ) د ( $\mathbf{w}_{i}$ ) التوقع ( $\mathbf{\mu}_{i}$ ) التوقع ( $\mathbf{u}_{i}$ 
### 🚹 حاول أن تحل

# مثال 🚮

💎 إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي كالآتي:

٦	ب	۲	١	•	سىر
٠,٣	1	٠,٣	٠,١	٠,١	د(س)

احسب قيمة أ ، بإذا كان التوقع µ ٣,٥

#### 🔷 الحل

### 🚹 حاول أن تحل

( الآتى: إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتى:

٤	٣	۲	æ	سس
J	17	۲ل	4	د(سی)

أولًا: أوجد قيمة ل ثانيًا: أوجد التوقع

### التباين: Variance

التباين لمتغير عشوائي متقطع سم يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائي عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز (σ) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

ملاحظة الانحراف المعيارى للمتغير العشوائي سه هو الجذر التربيعي للتباين و يرمز له بالرمز o ، و يلاحظ أن التباين والانحراف المعياري كميات موجبة دائمًا.

# مثال 🚮

(س) إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالي هي د(س) المراعث المرا

### 🔷 الحل

س۲٫۰۰ د (ســر)	سى " د(سى)	د(سیر)	سنس
<u>^</u>	<u>£</u>	<del>۲</del>	۲
<del>"</del>	<u>".</u> 17	<del>"</del>	١
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	١
<u> 72</u>	17	7	۲
0	<u> </u>		

$$(\mu) = \frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma}$$
 سی × د $(m_{\gamma}) = \frac{\circ}{\Lambda}$  التباین  $(\sigma^{\gamma}) = \frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma}$  س × د $(m_{\gamma}) = \frac{\eta}{\Lambda}$  د $(m_{\gamma}) = \frac{\eta}{\gamma}$  د $(m_{\gamma}) = \frac{\eta}{\gamma}$ 

### 🚹 حاول أن تحل

حيث سه ١٠٠٠ ، ٢ ، ٢ ، ١ أوجد: أولًا: قيمة أ ثانيًا: التوقع والانحراف المعياري للمتغير العشوائي سه.

### معامل الاختلاف: Coefficient of Variation

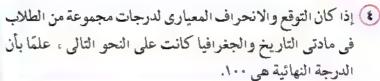
عند دراستنا للانحرف المعيارى كمقياس لتشتت قيم المتغير العشوائى عن توقعه علمنا بأنه يقاس بنفس وحدات المتغير موضوع البحث سواء كانت هذه الوحدات درجات أو أمتار أو كجم .. إلخ أى أنه يصلح أيضًا في مقارنة مجموعتين لهما نفس الوحدات ونفس المتوسطات. أما إذا اختلفت الوحدات أو المتوسطات بين المجموعتين فإنه يتعذر استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للمقارنة ومن هنا نشأت الحاجة إلى مقياس نسبى للتشتت يخلصنا من هذه الوحدات المختلفة و يمثل معامل الاختلاف حلًا مناسبًا لهذه المشكلة.

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعياري للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها و يتحدد كما في العلاقة الآتية:

معامل الاختلاف = 
$$\frac{1 \text{Kiser(16) Ilonality}}{\text{Ilonality}} \times ** ۱ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times ** ۱ \%$$
 معامل الاختلاف

وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة في صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.







امتحان الجغرافيا	امتحان التاريخ	المقاييس
97	٧٠	التوقع
٨	٧	الانحراف المعياري

أوجد معامل الاختلاف لكل مادة - ماذا تلاحظ ؟

🔷 الحل

"." معامل الاختلاف المتوسط المتوسط ... معامل الاختلاف المتوسط

.. معامل الاختلاف لمادة التاريخ 😽 × ١٠٠٪ ١٠٪،

معامل الاختلاف لمادة الجغرافيا  $\frac{\Lambda}{97} \times 1.00 \, \text{Mpc}$ 

نلاحظ من الحل: أن التشتت النسبي لامتحان مادة التاريخ أكبر من التشتت النسبي لامتحان مادة الجغرافيا، وهذا معناه أن امتحان مادة الجغرافيا أكثر تجانسًا من امتحان مادة التاريخ.

### 🛂 حاول أن تحل

(٤) إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٥٨٠ ، ١٥٥٠ وانحرافهما المعياري بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب اوجد معامل الاختلاف لكل نوع ماذا تلاحظ ؟ .

# مثال 🚮

کیس به 7 بطاقات، منها بطاقتان تحملان العدد ۲ وثلاث بطاقات تحملان العدد۲ و بطاقة تحمل العدد ۱۱ ،
 فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائية وعرف المتغیر العشوائی سه بأنه «العدد الظاهر علی البطاقة المسحوبة».
 أوجد:

- 🛈 دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير سـ.
- ب التوقع والانحراف المعياري للمتغير سـ ج معامل الاختلاف.

#### 🔷 الحل

اً س تأخذ القيم ۲، ۳، ۱۱ حيث: د(۲) = ل (س ح ۲) 
$$\frac{7}{7} - \frac{7}{7}$$
 د(۳) ل (س ۲)  $\frac{7}{7} - \frac{1}{7}$  ، د(۳) ل (س ۱۱)  $\frac{1}{7} - \frac{1}{7}$  والجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

11	٣	۲	سر
1	1	1 7	د(سر)

ولحساب التوقع والانحراف المعياري نكون الجدول التالي:

س <sup>۲</sup> ر = د(سر)	سىر " د(سىر)	د(سر)	سر
<u> </u>	<u>£</u>	<del>"</del>	۲
<u>*Y</u>	<del>q</del>	7	٣
171	<u> </u>	1	11
47	٤	موع	المج

### 🚹 حاول ان تحل

كيس يحتوى على ١٠ بطاقات واحدة تحمل الرقم ١ ، بطاقتان تحمل كل منهما الرقم ٢ ، ثلاث بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٢ ، و أربع بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٤ ، فإذا سحب من الكيس عشوائيًا إحدى هذه البطاقات وكان المتغير العشوائي سم يعبر عن العدد على البطاقة المسحوبة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير واحسب كلًّا من التوقع وانحرافه المعياري ومعامل الاختلاف.



. Tit	TILL. NA		الصحيحة	170 July 1884	22 4 . N. S
المعصام:	اقحانات	مبرار سبوار	الصحدد	الاحالها	اوقت احسر
-		<b></b>	60		, ,

٠,٢٥) } فإن التوقع	۱۲) ، (۰,۰ ، ۱	۰,۲۰) ، (۰	سہ هو {(٠،	للمتغير العشوائي	وزيع الاحتمالي	🕦 إذا كان الت
						يساوى:

إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وكان التوقع يساوى 
$$7, \cdot$$
 ،  $( w )$   $( w )$  و الانحراف المعيارى له يساوى:

### ثانيًا: أوجد التوقع والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لكل مما يأتي:

۲	١,	٤	٥	اسس	<u>•</u>		4	٣	۲	ع اسر
1	14	<u>۳</u> ۸	1 75	د(سیر)			1	1	1	د(سر)
				٣	۲	١		١	٣	(I)

٣	۲	1	*	1	٣	سيس	(3)
17	1	1/2	1/2	1	14	د(سر)	1

### ثالثًا: أجب عن الأسئلة الأتية:

(١٤ كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

7	٤	۲	1	سر
1.5	†	٠,٣	٠, ٢	د(سرر)

أولًا: أوجد قيمة أ ثانيًا: أوجد المتوسط والانحراف المعياري

- إذا كان مدى المتغير العشوائي سه هو  $\{1,7,7,7,7\}$ ، لاسه المراب على المتغير العشوائي سه هو  $\frac{2}{70}$ ، لاسه المراب على المراب على المراب المراب على المراب ا
- (س عثوراً عشوائيًّا متقطعًا مداه  $\{-1, 1, 1, 3, 3\}$  ، ل (-1, 1, 3, 3) . ل (-1, 1, 3, 3) . (-1,
- 🕦 إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة تو زيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي ، حيث ٠ < ح < ١

٦	٣	صفر	٣	س
ح	۲ح۲	ح۲	ح	د(سر)

فأوجد: ١ قيمة ح

🥕 المتوسط والتباين للمتغير س.

史 التوزيع الاحتمالي للمتغير ســـ

(١) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

†	٤	۲	1	سہر
1,1	٠,٤	٠,٣	٠,٢	د(سیر)

احسب قيمة أ إذا كان التوقع لل ٣ ثم أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي سم.

- الا إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع سريحدد بالدالة دحيث: د(س) السري ميث س ١، ٢،٢ أوجد: أو قيمة أ
- الا إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) = المستفيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) = المستفير سه. أوجد: (أ) قيمة أ
- اذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) بر عنيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) بر عنيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) فأوجد: أن قيمة م
  - (س) الدالة دحيث: درس) المسلم متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة دحيث: درس) المسلم الم
  - (۱۰۰۰) فران مدى المتغير العشوائي سه هو (۲۰۰۰) وكان ل (سه ۱) و كان التوقع يساوى ۱ فأوجد:

    (۱۰۰۰) ل (سه ۲) ل (سه ۲)
    - (الا عشوائيًا متوسطه μ وتوزيعه الاحتمالي كالآتي: الاحتمالي كالآتي:

٤	크	۲	•	سي
to	1 1	Ť۲	١	د(سیر)

(1) احسب قيمة أ ، ك

المعباري للمتغير س.

# التوزيع المندسي وتوزيع ذي الحدين

الوحدة الرابعة

3 - 4

### Geometric and Binomial Distributions

### المصطلحات الأساسية

#### سوف تتعلم

🗖 تجربة بيرنولي

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ذي الحدين.

التجربة الاحتمالية الهندسية
 التوقع والتباين والانحراف

التجربة الاحتمالية الهندسية
 التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

المعياري للتوزيع الهندسي.

🛭 توزيع ذي الحدين.

### تجربة بيرنوثي Bernoulli trial

هى تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبَّر عن أحدهما بالنجاح. و يُعبَّر عن الآخر بالفشل. فمثلًا، تجربة إلقاء قطعة النقود مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي: لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعدُّ الصورة هي النجاح. والكتابة هي الفشل، أو العكس عثال اخين عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: (٢، ٢، ٣، ٤، ٥، ٣) يُمكِن اعتبار هذه التجربة تجربة

مثال اخر: عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: { ١ ، ٢ ، ٢ ، ٥ ، ٦ } يُمكِن اعتبار هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أكبر من ٣ (مثلا) هو النجاح، وأنَّ ظهور أيَّ عدد آخر هو الفشل.

### التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أُوَّل نجاح اسم التجربة الاحتمالية الهندسية geometric probability experiment

### شروط التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية هندسية

- (١) اشتمال التجربة على محاولات مُتكرّرة ومستقلة.
- (٢) كل محاولة لها نتيجتين متنافيتين (نجاح أو فشل).
  - (٣) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة
    - (٤) التوقُّف عند أوَّل نجاح

### المتغير العشوائي الهندسي

في التجربة الاحتمالية الهندسية إذا كان المتغير العشوئي سم يرمز إلى الوصول لأول محاولة نجاح فإن سم متغير عشوائي فإن سم متغير عشوائي هندسي (ح) للدلالة على أن سم متغير عشوائي هندسي ، ح يمثل احتمال النجاح.

٥ آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الأنوات المستخدمة

### دالة التوزيع الاحتمالي الهندسي:

إذا كان س - هندسي (ح) فإن

حيث ح احتمال النجاح ، ن هي عدد المحاولات وصولًا الى أول نجاح

# مثال 👩

🕦 رمي أحمد قطعة نقود وكان النجاح هو ظهور صورة، ما احتمال ظهور الصورة عند المحاولة الرابعة؟

### 🔷 الحل

بفرض أن سہ متغیر عشوائي يرمز إلى الوصول لأول محاولة نجاح فإن سہ سه هندسي  $(\frac{1}{7})$  ح (صورة)  $\frac{1}{7}$ ، ن ع  $\frac{1}{7}$  ل (سہ ع)  $\frac{1}{7}$  ا  $\frac{1}{7}$ 

# مثال 💣

😯 إذا كان س - هندسي (٤٠٠) فأوجد كلا ممايلي :

### 🔷 الحل

(اس=۲) اح (۱ ح) د ۱ ع. ۱ (۱ غ. ۲) ۱ ع۲. ۰

$$\begin{bmatrix} (\xi & \omega) & J + (\forall & \omega) & J + (\forall & \omega) & J + (\forall & \omega) & J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\xi & \psi) & J + (\forall & \omega) & J + (\forall & \omega) & J + (\forall & \omega) & J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\xi & \psi) & \xi + (\forall & \xi & \xi) & \xi + (\forall & \xi & \xi) & \xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\xi & \psi) & \xi + (\forall & \xi & \xi) & \xi + (\forall & \xi) & \xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\xi & \psi) & \xi + (\forall & \xi) & \xi & \xi \\ (\xi & \xi) & \xi & \xi & \xi & \xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\xi & \psi) & \xi + (\forall & \xi) & \xi & \xi \\ (\xi & \xi) & \xi & \xi & \xi & \xi \end{bmatrix}$$

٠,٠٣١١٠٤ ١٦(٠,٤ ١)٠,٤ ١٠٥ (٦ ١) ح (١ ١٠٠٠) ع

### 👇 حاول أن تحل

🕦 إذا كان سـ - هندسي (٠,٨) فأوجد كلا ممايلي

(س>>٢) (س

# مثال 🚮



ت يحتوي قرص دوار على ثمانية أقسام متساوية مرقمة من ١ إلى ٨، فإذا أدير القرص عدة مرات فأوجد أحتمال أن يستغرق الأمر أكثر من أربع مرات ليشير مؤشره لظهور عدد أولي للمرة الأولى

### 🔷 الحل

بفرض آن سہ ہ هندسي (ع)

الأعداد الأولية هی 
$$7:7:0:7$$
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 
 $5:7=\frac{2}{1}=0$ 

### 🔷 حل آخر

حساب احتمال أن يستغرق الأمر أكثر من أربع دورات لرؤية عدد أولي للمرة الأولى:هذا يعني أننا نفشل في الحصول على عدد أولي في كل دورة من الدورات الأربع الأولى.الاحتمال يُحسب على أنه للحصول على عدد أولي في كل دورة من الدورات الأربع الأولى.الاحتمال يُحسب على أنه للحصول على أنه للحصول على أنه للحصول على أنه للحصول على المحرك المحر

### التوقع والتباين للتوزيع الهندسي

### 담 حاول ان تحل

💎 في مثال ٣ احسب التوقع والانحراف المعياري

### توزيع ذي الحدين

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرَّات المستقلة اسم التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين. إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

- (١) اشتمال التجربة على محاولات مُتكرّرة ومستقلة.
  - (٢) كل محاولة لها نتيجتين فقط نجاح أو فشل.
    - (٣) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة
  - (٤) وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة.

ملحوظتين سنرمز للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذي الحدين بالرمز سـ~ حدين (ن، ح) حيث ن عدد محاولات التجربة ، ح احتمال النجاح

### التوزيع الاحتمالي للمُتفيّر العشوائي ذي الحدّين

إذا كان سـ ~ حدين (ن ، ع) فإن التوزيع الأحتمالي للمتغير العشوائي سـ يعطى بالعلاقة الأتية:

فمثلاً: إلقاء ٧ قطع نقود منتظمة ثم ملاحظة عدد الصور التي ظهرت على الوجه العلوى (تجربة ذات حدين). (تمثل تجربة ذات الحدين لأنها تحقق الشروط الأربعة السابقة).

### مثال 🚮

﴿ في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ١٥ مَرَّة، إذا كان سه متغير عشوائي يعبر عن عدد الصور أوجد احتمال ظهور الصورة ٥ مَرَّات.

### 🔷 الحل

# مثال 🦈

و يتألَّف اختبار احصاء من ٥٠ سؤال، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدد. ولكلَّ منها ٤ بداثل، واحدة منها فقط صحيحة. إذا أُجيب عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية. فما احتمال أنَّ تكون إجابات ١٠ أسئلة فقط صحيحة ؟

### 🗘 الحل

بفرض أن سہ 
$$\sim$$
 حدین (۵۰،  $\frac{1}{2}$ )  
 $(1 - 1) = 0$  ق رح  $(1 - 1) = 0$  ن م ، ر  $(1 - 1) = 0$  ن م ، ر  $(1 - 1) = 0$  ن م ، ر  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  ن م  $(1 - 1) = 0$  نقریباً

# مثال مثال

- 🕥 إذا كان احتمال فوز فريق ما في مبارة لكرة القدم يساوي ٦,٠ فإذا لعب الفريق ٧ مباريات فأوجد:
- احتمال فوزه في ٦ مباريات على الأقل
- أ احتمال فوزه في ٤ مباريات فقط
- 🕏 احتمال فو زه في مبارتين على الأكثر

### 🔷 الحل

بفرض أن س ~ حدين (٧، ٢,٠)

- $\cdot$  , ۲۹۰۳۰  $\xi$   $(\cdot, 7)^{\sharp}(\cdot, 7) \times_{\xi}$  ق $(\xi = -1)$  ل  $(-1)^{\sharp}(\cdot, 7) \times_{\xi}$
- $(v \quad w) + (v \quad w) + (v \quad v) + (v \quad v)$  ل (سہ > 7) ل
- (7) ل (س< ۲) ل (س< ۲) ل (س ۱) ل (س ۲) ل (س ۲) ل (س ۲) ل (س ۱) ل (س

# مثال 🧀

- (سے ۲) وکان سے متغیرا عشوائیا ذا الحدین سے حدین (۳، ح) وکان ل(m > 1) وجد ل(m > 1)
  - 🔷 الحل

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \quad \sum \quad \ddots \quad \vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \times (2) \cdot (1 - 2) = \frac{1}{\sqrt{4}} \times (2) \cdot (1 - 2) = \frac{1}{\sqrt{4}} \times (2) \cdot (2) \times (2) = \frac{1}{\sqrt{4}} \times (2) \times (2) \times (2) = \frac{1}{\sqrt{4}} \times (2)$$

$$\frac{7}{4}$$
 رسے  $\frac{7}{7}$  کی  $\frac{7}{7}$  کی  $\frac{7}{7}$  کی  $\frac{7}{7}$  کی رسے  $\frac{7}{7}$ 

المتوسط و التباين للتوزيع ذي الحدين

إذا كان سم مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّ

( من الحياة: أجريت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواء جديدًا. وقد خلُصت الدراسة إلى أنَّ ١٠٪ من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيب هذا الدواء ل ١٥٠ طفلًا ، فكم طفل يُتوقَّع أنْ تظهر عليه هذه الأعراض؟

🔷 الحل

سـ - حدين (۱۵۰ ، ۱۰۰)

التوقع ن×ح ١٥٠ × ١٠٠ ١٥٠

إذن، يُتوقِّع أنْ تظهر الأعراض الجانبية للدواء الجديد على ١٥طفل

# مثال مثال

- ألقى أحمد قطعة نقود غير منتظمة ٢٠٠ مَرَّة، فكان عدد مَرَّات ظهور الكتابة هو ١٤٠ مَرَّة. إذا ألقى أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرَّة أُخرى، فأوجد كُلُّ ممَّا يأتي
  - العدد المُتوقَّع لمَرَّات ظهور الكتابة عند إلقاء أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرَّة.
    - تباین عدد مَرّات ظهور الکتابة عند إلقاء أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرّة
      - 🍎 الحل
      - ·, V 12. ٠٠ التوقع ن × ح ٢٠ ٧×٠ - ١٤
        - $\mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{t} \times$



# أولا: اختر الاجابة الصحيحة من بين الأقواس

- (١) إذا كان احتمال النجاح في تجربة واحدة يساوي ٣٠٠، فإن احتمال أن تكون المحاولة الأولى التي تحقق فيها النجاح هي المحاولة الثالثة؟
  - ., , q (3)

- ٠,٢١ (٢)
- ٠,٣٤٢ (٦)
- 😯 إذا كان احتمال حدوث الفشل في تجربة معينة هو ٠,٠٠ فإن عدد المحاولات المتوقعة قبل النجاح الأول يساوى
  - 7 (3)

- 0 (7)
- ۽ پ
- 4 1

·, \ £V (1)

- التوقع الرياضي (المتوسط) لتوزيع هندسي مع احتمال نجاح٤,٠ يساوى ......
- ٦ (٥)
- ٥ 🚓
- نې ځ
- r (1)

تغرق الأمر أكثر من أربع محاولات	ي ۲٫۰، فإن احتمال أن يس	جاح في تجربة واحدة يساو	¿ إذا كان احتمال الن
			لرؤية النجاح الأو
.,7744 3	٠,0٩٠٤ 🟞	٠, ٤٩١٥ ب	
		سى احتمال نجاحه ٤,٠ يسا	
r, vo (a)	۳,۷٥ 🖘	1,70 😲	٠,٢٥ (١)
أن يحدث النجاح الأول قبل أو في	اوي ٢٥.٠. فإن احتمال أ	لنجاح في تجربة واحدة يس	ردا كان احتمال المحاولة الثالثة المحاولة الثالثة
79 3	<u>V</u> ?	₹V (+)	10 1
حدث النجاح الأول بعد ٢ محاولات	ي ٢,٠، فإن احتمال أن يـ	لجاح في تجربة واحدة يساو	<ul> <li>إذا كان احتمال الا</li> <li>فاشلة يساوى</li> </ul>
., 410 3	٠,٥١٢ 🖘	٠,٢٥١ 😛	
, ١٠ فإن احتمال حدوث ٤ نجاحات	٤,٠ وعدد التجارب هو ز	عاح تجربة واحدة تساوي ح	🛦 إذا كانت فرصة نج
			يساوى
٠,٠١٢٤ ٢	·,·07V 🖘	٠,٤ 😛	·, ۲0-A 🕕
ن ٥٠ فإن احتمال حدوث النجاحات	-٥,٠ وعدد التجارب هو	باح تجربة واحدة تسا <b>و</b> ي ح	
			على الأقل
٠,٨٤٢٧٥ (٥)	٠,١٥٦٢٥ (٣)	٠,١٨٢٥ ك	-,0 1
و ن ٧ فإن احتمال عدم حدوث أي	ح ۲٫۰ وعدد التجارب هو	جاح تجربة واحدة تساوي	🕦 إذا كانت فرصة نا
			نجاح يساوي
٠,٠٨٢ ٥	٠,٥٠٤١ 🐑	٠,٢١٨٧ ك	•,••\ 1
هو ن ۱۲ فإن احتمال حدوث ۱۱	ح ٧٥,٠ وعدد التجارب		
		يساوى	نجاحات أو أكثر
۰,۲٦٦٨	٠, ١٢٢٤ 🖘	٠, ١٤٥٤ ب	- , \OAE (Î)
ن ١٠ فإن احتمال الحصول على ٤	٧,٠ وعدد التجارب هو	جاح تجربة واحدة تسا <b>وي</b> ح	👣 إذا كانت فرصة نه
			نجاحات بالضبط
٠,٢٦٦٨ ٥	· , £VAV 🔄	٠,٢٠٠١ ب	٠,٠٣٦٨ (أ)

	يساوى	حدين (٥، <del>٪</del> ) فإن ل(سـ ٤) <u>:</u>	الله إذا كان سـ
(C) 17/1937	12 (F)	1. V.	A· (1
توقع یساوی ۸ و التباین <del>۲۰</del> فإن قیمة	حدين (ن . ح ) وكان ال	يرًا عشوائيًا ذا الحدين سـ ~ .	اِذَا كَانَ سِـ مَتَغُ
			ن تساوي
44 (2)	78 🕏	۵٦ 🔑	£A 1
نمال ظهور الصورة في مرات فقط	أرض ٤ مرات فإن احا	ء قطعة نقود منتظمة على الا	(٥) في تجربة القا
			يساوى
1/2 (3)	<u>\</u>	1 ( <del>)</del>	17 1
د ۲ هو ۱۰ مرات فإذا إلقت جنة حجر	, عدد مرات ظهور العد	ر نرد غیر منتظم ۱۰۰ مرة وکاز	القت جنة حجر
	لهور العدد ٢ بساوي	, ي فإن العدد المتوقع لم أت خ	النود ٣٠ مرة أخ
<b>q</b> (3)	7 (?)	۲ (ب)	Y (1)
د الأساسية و علامة المسواة و الفاصلة			
بصورة عشوائية فإن احتمال أن يضغط			
Ľ	ساوی تقریبًا	ليات الحسابية ٢ مرات فقط يس	على أزرار العم
., 720 3	·, ۲۲9 💌	٠, ١٢٩ 😛	٠,١٢٤ ا
فإن احتمال أن يكسب ٢ مباريات من	خلال مسيرته الرياضية	ب ٧٥٪ من مبارياته التي لعبها -	إذا كسب لاعب
		قادمة يساوي	بين ٥ مباريات
2V 3	1.18	ب ٥١٢	140
ة على الإقل إذا إجريت العملية ثلاث	ن احتمال عملية واحد	, نجاح عملية جراحية ٩٠٪ فإ	
., 444 🕥	٠,٩ 🕏	٠,١ ب	مرات هی (أ) ۰٫۰۰۱
منها أربعة بدائل فإن احتمال أن تحصل	لاختيار من متعدد لكل.		
		ة صحيحة يساوى	منی علی ۷ اَستَل
· , - ۲ · A (3)	٠,٠٣٠٨ 🖘	٠,٢٥ 史	·,···٣·٨ ①

### ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١٠ شركة إنتاج تقوم بتصنيع قطع إلكتر ونية. احتمال أن تكون القطعة معيبة هو ٠٠,٠٠ فإذا قامت الشركة بفحص ٢٠ قطعة من إنتاجها عشوائياً. ما احتمال أن تكون هناك ٢ قطعة معيبة بالضبط؟
- ﴿ في مركز خدمة العملاء، احتمال أن يتم حل مشكلة العميل في المكالمة الأولى ٢٠٠٠ ما احتمال أن يتم حل المشكلة في المكالمة الثالثة؟
- احتمال أن يوافق شخص على عرض تسويقي عبر الهاتف ١٠٠١ ما احتمال أن يوافق أول شخص في المكالمة الخامسة؟
- احتمال أن يتم تسليم الطلب في الوقت المحدد هو ٩,٠٠.إذا تم تسليم ١٢ طلبًا، ما هو احتمال أن يتم تسليم ١٠ طلبات منها في الوقت المحدد؟
- ﴿ ورشة لإصلاح الأجهزة، احتمال إصلاح جهاز معين بنجاح هو ٠٠,٨٥. إذا تم إصلاح ١٥ جهازًا، ما هو احتمال إصلاح ١٣ جهازًا منها بنجاح
- احتمال أن تكون رسالة بريد إلكتروني معينة غير مرغوب فيها (مزعجة) هو ٢٠٠٠ إذا استلمت ٢٥ رسالة بريد الكتروني، ما هو احتمال أن تكون ٥ منها مزعجة ٢٠
- احتمال أن تنمو بذرة معينة بعد زراعتها هو ٧٠ . إذا زرع مزارع ٣٠ بذرة، ما هو احتمال أن تنمو ٢٠ بذرة منها؟
- ♦ احتمال أن يصوت ناخب معين لصالح مرشح معين هو ٢٠٠١إذا تم اختيار ١٠ ناخبين بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن يصوت ٨ منهم على الأقل لصالح المرشح؟
- (٩) احتمال أن يتبرع شخص لحملة معينة هو ١٠٠١إذا تم التواصل مع ١٠٠ شخص، ما هو احتمال أن يتبرع ٢ منهم على الآكثر؟
- احتمال أن يجد شخص موقفًا للسيارة في محاولته الأولى هو ٢٠٠٠ ما هو احتمال أن يجد الموقف في محاولته الرابعة؟

- المحاولة الثانية؟ المحاولة الأولى هو ٦,٠. ما هو احتمال أن يتم الإصلاح بنجاح في المحاولة الثانية؟
- ዢ احتمال أن يوافق زبون على عرض بيع معين هو ٠٠,١٥ ما هو احتمال أن يوافق أول زبون في المكالمة الرابعة؟
- 😗 احتمال اكتشاف عطل في جهاز معين عند فحصه هو ١٠٠٠ ما هو احتمال اكتشاف العطل في الفحص الثاني؟
- الموافقة في المحاولة الثالثة على موافقة جهة تنظيمية من المحاولة الأولى هو ٢٠٠٠ما هو احتمال الحصول على

# طلة كتامة الأجيمان للمتغير العسوائد المتصل

### الوحدة الرابعة

2 - 2

### Probability Density Function Of Random Variable

المصطلحات الأساسية

سوف تتعلم

Arobability Density کثافته احتمالیت

◄ درجة الحرارة المتوقعة خلال أحد الأيام.

٥ دالة الكثافة الاحتيالية

Continuous Random Variable

المتغير العشوائي المستمر أو المتصل

الأوز الدخراف الأوران و (الروم ال):



المتغير العشوائي المستمر (المتصل): مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أي إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

# ومن أمثلة ذلك:

◄ أجر عامل بالدولة تم اختياره عشواتيًّا.

◄ طول احد المرشحين لفريق كرة السلة.

# المتغير العشوائي المستمر



النقطة (س، ص) تقع داخل أو على الدائرة س٢ + ص٢ ع التي مركزها نقطة الأصل (و) ونصف قطرها ٢ وحدة طول والمطلوب إيجاد مدى المتغير العشوائي سـ الذي يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة.

### 🔷 الحل

- " ف { (س ، ص): س۲ + ص۲ < ٤ } ...
- ٠٠٠ > أ > ٢ حيث أبعد النقطة (س، ص) عن مركز الدائرة.
  - مدى المتغير العشوائي سه [٠، ٢]

نلاحظ أن كل نقطة في هذه الفترة هي قيمة ممكنة للمتغير العشوائي سم كما هو موضح بالشكل

### 🚹 حاول أن تحل

🕦 إذا كان أقصى عُمر افتراضي لأحد أنواع الهواتف المحمولة «سـ» يقدر بـ ١٨ ساعة تشغيل. فاكتب مدى ســ.

### 🚹 حاول أن تحل

- 💎 بين أيًّا مما يأتي يدل على متغير عشوائي متقطع وأيها يدل على متغير عشوائي متصل.
  - (أ) عدد أرغفة الخبز التي أنتجها مخبز خلال ساعة.
  - 🖵 الوقت الذي يستغرقه كريم في انتظار صديقه زياد.

آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الأنوات المستخدمة

- ج عدد الأهداف التي سجلها الفريق الفائز في مباريات كرة اليد.
- د عدد المخالفات المرورية المسجلة على طريق مصر إسكندرية الصحراوي خلال يوم.
  - الوقت الذي يستغرقه المعلم في شرح درس المتغير العشوائي.

### دالة الكثافة الاحتمالية : Probability Density Function

د(سی)

لأى متغير عشوائى متصل (مستمر) س توجد دالة حقيقية مداها غير سالب يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائى من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < س < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة دبين القيمتين أ، ب كما في الشكل المقابل.

### وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية:

◄ د(س) > ١٠ لجميع قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.

◄ مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحني الدالة د وأعلى محور السينات تساوى الواحد الصحيح.

# مثال 🚮

١ إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$r > m > 1$$
 ،  $(r - \frac{1}{7})$  ،  $r < m < 7$  د $(m)$  =  $\frac{1}{7}$  ومفر ، فيما عدا ذلك

- ۱- (۲ > س> ۲) أثبت أن: ل (۱ < س> ۲) البت أن
- اوجد: ل (س< ۲)، ل (س< >٥,٢)، ل (۲< س< ٥,٢).</li>

### ♦ الحل

$$\frac{1}{7} = (1 + 7) \times \frac{1}{7} = (1)$$

$$c(7) = \frac{1}{7} = (1 - 1) \times \frac{1}{7} = (7)$$

$$\frac{r}{r} \cdot (1-\epsilon) \times \frac{1}{r} \cdot (r) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7}$$
 =  $(1 \quad 0) \times \frac{1}{7}$  =  $(7,0)$  3

P

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض مساحة المثلث =  $\frac{1}{7}$  طول القاعدة  $\times$  الارتفاع مساحة شبه المنحرف =  $\frac{1}{7}$  مجموع القاعدتين المتوازيتين  $\times$  الارتفاع

$$1 \quad \text{f} \quad (1 < \sim < \gamma) \quad \frac{1}{7} \left( \frac{1}{7} + \frac{0}{7} \right) \times \gamma$$

$$1 - r \times \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} = 1$$

$$1 \times \left(\frac{r}{r} + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r}$$

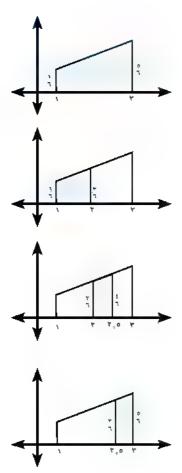
$$\frac{1}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{71} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{r} \times \left(\frac{9}{7} + \frac{\xi}{7}\right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{r}{\Lambda}$$
  $\frac{q}{r\xi}$   $\frac{1}{r} \times \frac{q}{7} \times \frac{1}{r}$ 

$$\frac{1}{r} \times \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{r}\right) \frac{1}{r} = (r, 0 > \sim r)$$

$$\frac{V}{V_{\xi}} = \frac{1}{V} \times \frac{V}{T} \times \frac{1}{V} = 0$$



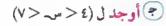
لاحظ أن : ل (٢ < س < ٥,٠) ا [ ل (س < ٢) + ل (س > ٥,٠) ]  $\frac{V}{VS} = \frac{VV}{VS} = V = \left(\frac{V}{V} + \frac{V}{V}\right) = V$ 

### 🚹 حاول أن تحل

(٣) إذا كان سر متغيرًا عشوائيًّا متصلًا حيث:

$$1 > m > 1$$
 حیث  $1 < m < 10$  د(س) =  $\frac{1}{6}$  فیما عدا ذلك

- 1 أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س.
  - (٣< س) أوجد ل



# مثال مثال

إذا كان سه متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

(س >۲) أوجد ل أ أوجد قيمة ك.

 $1 = V \times \left(\frac{3+1}{4} + \frac{3+7}{4}\right) \frac{1}{4}$ 

$$\frac{q}{r\xi} \frac{r+7}{r\xi} = (r)_3,$$

# $\frac{c}{1} = \frac{r}{r^2} \times \frac{1}{r} = 1 \times (\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}) \times (r < \infty)$

### 🚰 حاول أن تحل

(٤) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو:

$$c > -\infty$$
 د (س) -  $\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\gamma_{m}+1}{\gamma_{m}} & 1 < \infty < 0 \\ -\gamma_{m} & 0 \end{array} \right.$  فيما عدا ذلك

$$\frac{1}{2}$$
 (۲ + ر > س > اوجد قیمة ب إذا كان ل (ب

# 1 أوجد قيمة أإذا كان ل (سر < 1) - V

# 🚷 تمـــاريـن (٤–٤)

# أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

🕦 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هو :

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{7} & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{cases}$$
 فإن ل  $(m > 7)$  فإن ل  $(m > 7)$ 

<del>۴</del> 🚓

😯 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هو :

د(س) = 
$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \frac{1}$$

<u>٣</u> (٥

1 (2)

1 · 2

٣ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هو:

7 3

<u>\</u> =

7 (4)

اً) صفر

## ثانيًا: أجب عن الأسئلة الاتية :

(١٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا حيث:

(٥) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

ثانيًا : ل (س > ٤)

(٦) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًا حيث:

$$(w)$$
  $= \begin{cases} \frac{(w+1)}{V} & = \sum_{n=1}^{\infty} V < w < 0 \end{cases}$  د  $= \begin{cases} w < 0 \end{cases}$  فيما عدا ذلك

أولًا: أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س. ثانيًا: أوجد ل (س > ٣)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$(w)$$
  $=$   $\left\{\begin{array}{cc} \frac{1+w^{+}}{1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$  د(س)

إذا كان سه متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

﴿ إِذَا كَانَ سِم متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

د(س) 
$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{\Lambda} & m+1 & -2 & m < 3 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\ -2 & -1 & m < 1 \\$$

(ف) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

د(س) 
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{r} & -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & \frac{1}{r} & -\infty & \infty \end{array} \right\}$$
 د(س)  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$  را من  $\left\{ \begin{array}{ccc} -\infty & -\infty & \infty \\ -\infty & -\infty & \infty \end{array} \right\}$ 

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

أوجد: أولًا: قيمة ك

تفكير ابداعين

(١٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$t > m > 0$$
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > m > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t > 0$ 
 $t >$ 

(١٣) إذا كان سم متغيرا عشوائيا متصلا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) 
$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1+m^n}{2} & -2 & \infty < 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$
 وکان  $\left\{ \begin{array}{ccc} 1+m^n & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$  اوجد



مقدمة الوحدة

بعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية التي تدرس في مقررات الإحصاء نظرًا لاستخداماتها المختلفة لنواتج بعض العمليات في العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية حيث يتعامل مع معظم الظواهر في حياننا

الوحدة

اليومية، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعي العالم الفرنسي

إبراهام دي موافر (Abraham de Moivre) عام ١٧٥٦ م في إحدى مطبوعاته، كما شارك في تطويره عدد من العلماء من أشهرهم العالم الألماني كارل فريدك جاوس (Carl Friedrich Gauss) (۱۷۷۷ م – ۱۸۰۰ م) والذي يسمى التوزيع الطبيعي أحيانًا باسمه (منحني جاوس أو منحنى الجرس).



كارل فريدك جاوس



إبراهام دى موافر

ومن أشهر تطبيقات التوزيع الطبيعي التقييم الإداري للمرؤوسين وذلك لضمان <mark>قدر من العدالة، كما يستخدم في دراسة</mark> البواقي لتحليل الاتحدار، كما أن له علاقة وطيدة في خرائط الضبط (Control Charts) وغيرها

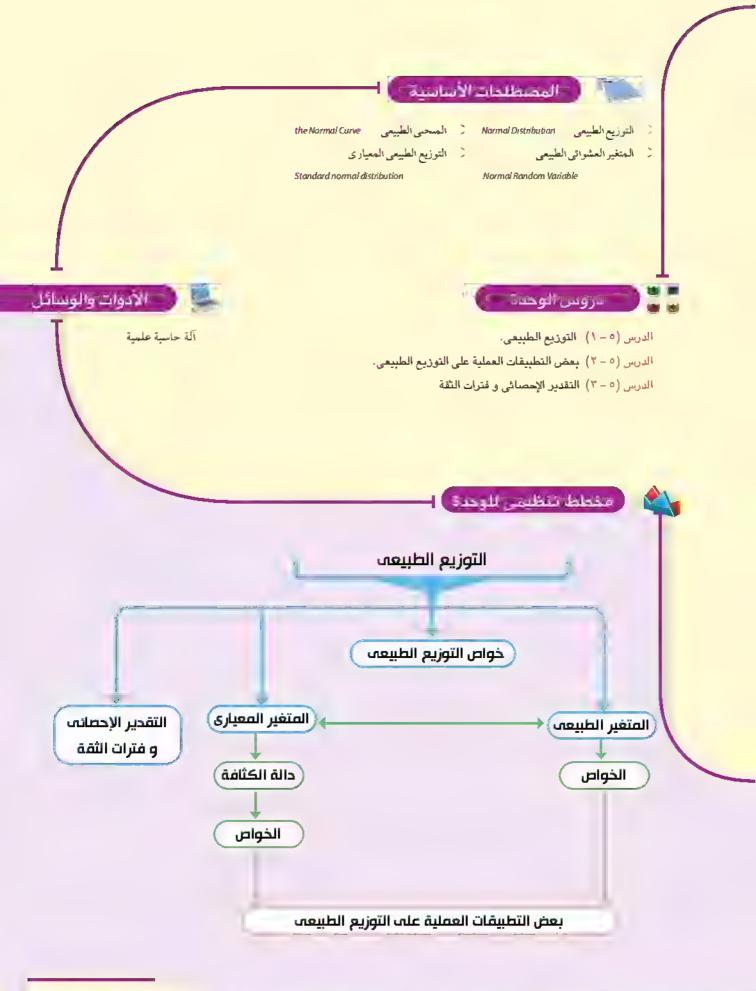
### أعداف الوحدة



### في نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- وخواصه.
- 🖫 يحسب احتمال المتغير المعياري .
- 🛱 يحسب احتمال المتغير الطبيعي غير المعياري.
- 🖶 يتعرف المتغير العشوائي الطبيعي المعياري، والشكل العام للمنحني الممثل لدالة الكثافة لهذا المتغير.

- 🛱 يفسر نتائج حصل عليها من حساب الاحتمال لمتغير عشواتي طبيعي
- 🖶 تقدير المتوسط الحسابي لمجتمع بنقطة
- 🖶 تقدير المتوسط الحسابي لمجتمع ىفترة ثقة.
- 🛱 يتعرف التوزيع الطبيعي الاعتدالي 🕀 يحول أي متغير عشو ئي طبيعي إلى متغير طبيعي معياري .
- # يوجد قيم احتمالات متغير عشوائي له توزيع طبيعي معياري باستخدام الجداول الإحصائية .
- 🕮 يصف خواص منحنى التوزيع الطبيعي، ويعض الظواهر التي يعبر



### الوحدة الخامسة

# 1 - 0

# التوزيع الطبيعات

المصطلحات الأساسية

التوزيع الطبيعي

### Normal Distribution

4المنحني الطبيعي

### سوف تتعلم

المتغير العشوائي الطبيعي

پعض خواص المنحنى

الطبيعي 4التوزيع الطبيعي المعياري

🔿 خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري

🗘 حساب الاحتيال للمتغير

الطبيعي المعياري.

4التوزيع الطبيعي المعياري

Standard normal distribution

المتغير العشوائي الطبيعي Normal Random Variable

Normal Distribution

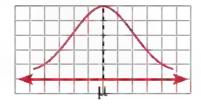
### مقدمة:

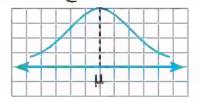
يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لما له من خواص نظرية هامة ، كما يمكن لنواتجه أن تأخذ أى قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية ومثال ذلك أطوال البالغين وأوزان الأطفال عند الولادة ودرجة الذكاء عند الإنسان .... إلخ و يوصف التوزيع الطبيعي بمعادلة رياضية تحدد منحناه وهي تتعين تعيينًا تامًّا بمعرفة التوقع  $\mu$  المتوسط) الجرس وهو متماثل حول المستقيم س المنحنى شكل الجرس وهو متماثل حول المستقيم س  $\mu$ 

ويتقارب طرفاه من المحور الأفقى حيث يمتد طرفاه إلى مالا نهاية كما هو موضح بالشكل المقابل.



يقال للمتغير العشوائي المتصل سم إنه "متغير عشوائي طبيعي "إذا كان مداه يتحدد بالفترة] ∞، ∞ [ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحني يتخذ دائمًا شكل الناقوس (الجرس) و يسمى منحني دالة الكثافة بالمنحني الطبيعي أو "منحني جاوس " و يتحدد شكل المنحني الطبيعي بمعرفة قيمتين أساسيتين هما : المتوسط 14 والانحراف المعياري σ للمتغير العشوائي سـ كما هو موضح بالأشكال التالية .





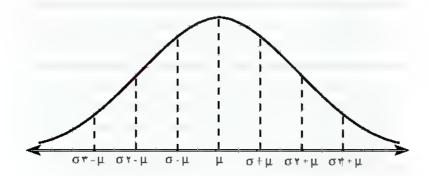
### Some Properties of the Normal Curve

### بعض خواص المنحنى الطبيعي

- (١) له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى ∞ ، ∞ .
- (٢) له محور تماثل يمر بالقمة و يقطع المحور الأفقى عند س لل.
- (٣) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعي وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح.
- (٤) من التماثل نجد أن المستقيم س لل يقسم المساحة الواقعة تحت المنحني وفوق محور السينات إلى منطقتين مساحة كل منهما ٥٠٠٠

آلة حاسبة علمية. الأبوات المستخدمة

- (٥) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل لمنحنى وأعلى محورالسينات تبعًا للفترات الآتية: ◄ من ١١ من ١١ من ١١ من ١١ من المساحة الكلية .
  - ◄ من ١ من ١٩ من المساحة الكلية.
  - ◄ من μ من μ ، ۵۳ والي ۳۹ ،۷٤ من المساحة الكلية .

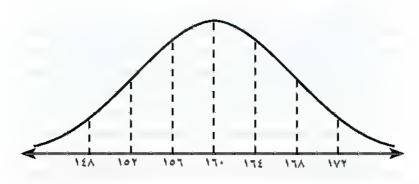


للحط أبن يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا حتى يكون التوزيع الطبيعي تقريبيًّا.

# مثال 🚮

- 🕦 إذا كان أطوال طلاب إحدى المدارس يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ١٦٠ سم ، انحراف معياري ٤ سم .اختير أحد الطلاب عشوائيًّا أوجد احتمال أن يكون:
  - 🕦 أكبر من ١٧٢ سم 🔑 أقل من ١٥٦ سم 🥏 محصور بين ١٥٦ سم ، ١٦٨ سم





- من المعطيات نجد أن: المتوسط لما = ١٦٠ ، الانحراف المعياري ٤ ٥٠ بمقارنة البيانات مع منحني التوزيع الطبيعي نجد أن: ٢ + ٣ س ١٦٠ + ٣ × ٤ لذلك فإن
  - $(\sigma r + \mu < \sim) J \quad (V r < \sim) J \quad \hat{1}$
  - " المساحة من لل OT + للى المساحة من الله OT + للى المساحة من الله OT + للى الله اله الله
  - المساحة من لم إلى م ٣٠٠ مع ٩٩٧٤ . : ٢ . ٤٩٨٧ .
  - · ، ٠٠١٣ ٠,٤٩٨٧ ٠,٥ ٥٣ + لل يمين لل ٠,٠٠١٣ ،٤٩٨٧ ٠

(σ μ> , (\o \ > \) (\o \ > )

 $\sigma$  المساحة من  $\mu$  إلى  $\sigma$   $\mu$  المساحة من  $\mu$  ألى  $\mu$ ∵ المساحة من لل  $\sigma$  إلى المساحة من لل  $\sigma$ 

· المساحة على يسار به م ، ٣٤١٣ · ، ٥ مساحة على يسار به ٠ ،١٥٨٧

 $(\sigma + \mu > \sim > \sigma \mu)$  (171) (171)

 $(\sigma + \mu > \mu > \mu) + (\mu > \mu > \sigma \mu)$ 

., 11 - , 2007 + ., TE.A - ., 90 £ + ., 7117

### 🚹 حاول أن تحل

إذا كان أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه لل ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم فأوجد:

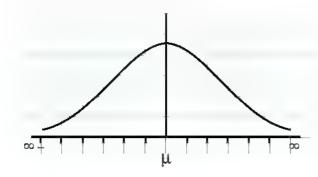
احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٢ كجم

史 النسبة المتوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٤ كجم ، ٧٢ كجم "وزن كل منهم"

🖘 عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن ٦٤ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية ٢٠٠٠ طالب.

### التوزيع الطبيعي المعياري

لاحظنا في التوزيع الطبيعي أنه عند إيجاد الاحتمال تكون أطوال القترات من مضاعفات الانحراف المعياري حتى يمكن حساب الاحتمال ، لذلك كان من المناسب تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيعات طبيعية معيارية وذلك بتحويل قيم (سم) إلى قيم معيارية (صم) وذلك بمعلومية المتوسط (H) والانحراف المعياري (σ) ، عندها يكون: μ ، ، σ ،



Standard normal distribution



إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط لم وانحراف معياري σ فإن: صم سم لل هو توزيع طبيعي معياري. متوسطه لل صفر وانحرافه المعياري O ا

### بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري (ص-):

- (١) المنحني يقع أعلى المحور الأفقى (محور السينات).
  - (٢) متماثل بالنسبة للمحور الرأسي (محور الصادات).
- (٣) طرفا المنحني يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى.
  - (٤) مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى ١
- (٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسي يقسم المساحة الواقعة تحت المنحني وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منها ٥٠٠
- (٦) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة] أ ، ب [بواسطة جداول خاصة.

### جدول المساحة أسفل منحني التوزيع <mark>الطبيعي المعياري :</mark>

Table of the area under the standard normal distribution curve

لتحويل التوزيع الطبيعي سـ إلى توزيع طبيعي معياري صـ نستخدم العلاقة :

صه سم لل ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق في نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة . وفيما يلي نوضح كيفية الكشف في جدول المساحات تحت المنحني الطبيعي المعياري .

4,49	۸۰٫۰۸	٧٠٠٠	۲٫۰۹	٥٠,٠٥	***	*,**	*,**	١٠١٠	*,**	ي
				.,.199						*;*
										$(\star_j \Lambda)$
										+,4
									*	*,4
									.,1001	*,1
						<b>.</b>				۰,۵
		*				٧٥٣٢			44**************	$\mathcal{F}_{i, \bullet}$
		.,	*************	********		***************			************	۷,۵
										۳,۵

ل (٠ < ص < ٠٠,٠٥) المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠،٠٥،] أى أن ى ٥٠,٠٠ لذلك نبحث في الجدول بالصف ٠٠٠٠ وتحت العمود ٥٠٠٠ فنجد العدد هو ١٩٩٩٠٠٠

٠,٠١٩٩ (٠,٠٥> ->٠) ا

ل ( - < ص > < . ) ... المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري فوق الفترة

[٠,٤٠٠] أى أن ى ٤٠٠، لذلك نبحث في الجدول بالصف أمام ٤٠٠ وتحت العمود ٠٠٠٠ فنجد العدد ١٥٥٤٠٠

٠,١٥٥٤ (٠,٤>٠) المار،

ل (٠ < ص < ٦٣ / ٠) المساحة تحت المنحني الطبيعي المعياري فوق الفترة

[٠، ٦٣. ٠] أي أن ي ٢٠,٦٣ ، لذلك نبحث في الجدول بالصف أمام ٢,٦ وتحت العمود ٢٠٠٠ فنجد العدد ٢٣٥٧.

٠, ٢٢٥٧ : (٠, ٦٣> ٥٠) نا

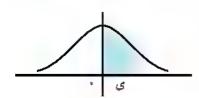
ل (- < ص > < ٢,٥٧) المساحة تحت المنحني الطبيعي المعياري فوق الفترة

[٠، ٧٠, ٢] أي أن ي ٢٠٥٧ ، لذلك نبحث في الجدول بالصف أمام ٢٠٥ وتحت العمود ٢٠٥٧ ، فنجد العدد ٤٩٤٩ ،

·, £9£9 ( ( , oV > ~> >) J ...

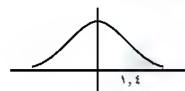
### حساب الاحتمال للمتغير الطبيعي المعياري:

Calculating the probability of the standard normal variable



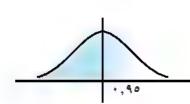
(١) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحني في الفترة [٠، ي] من الجدول جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري يعطى المساحة التقريبية فوق الفترة [٠] وأسفل المنحني الطبيعي حيث ى ≥٠٠، أى أن الجدول يعطينا مباشرة: ل (٠ < صد حى)

عمِيلًا ل ( < ص < ٢٠ ) ١١٧٩ ، ، ل ( < ص < ١٠ ) عمِيلًا ل ( < ص < ١٠ ) عمِيلًا ل ( < ص < ١٠ ) ١١٧٩ ، ،



٠,٠٨٠٨

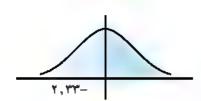
-, ۸۲۸٩



(٢) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى في الفترة [-ى، ١] من الجدول من تماثل المنحني الطبيعي المعياري حول المحور الرأسي نجد أن:

-, . O £ A . , £ £ O Y . , O

· ,9191 · ,2191 · · ,0

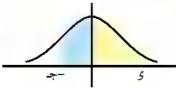


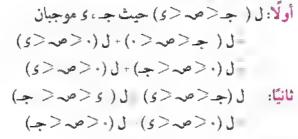
 $0 < \infty < \infty > 0$   $0 < \infty < \infty > 0$  $0.5197 \times 7 = (1.5 > 0.5) \times 7 = (1.5 > 0.5) \times 7.197 \times$ 

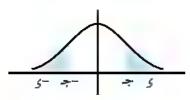
، باد ، بادمر د ، بادمر د ، باد د ، باد د ، باد ، باد ، باد د ، باد ، باد ، باد ، باد ، باد ، باد ، باد ، باد ،

# (٣) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحني في أي فترة [ج ، ٤]:

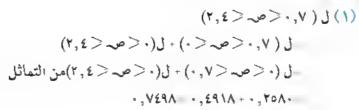
في هذه الحالة يفضل الاستعانة برسم المنحني المعياري مع ملاحظة أن المحور الرأسي يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين متساويتين في المساحة ومساحة کل منهما ٥٠٠٠

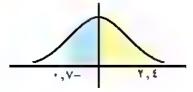




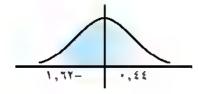


### عمياك

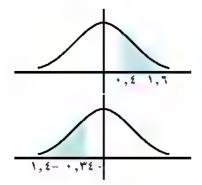




# (+, EE > ~> 1,77) J(Y)



 $(\cdot, \xi > \sim > \cdot)$  )  $(1, 7 > \sim > \cdot)$  )  $(1, 7 > \sim > \cdot, \xi)$  ) (m)7033, - 3001, · APAY, .



(٤) ل (٤) ١٠٤ حم < ٤٠٠) (·>~>>, T£) J (·>~>1,£) J \_ ل ( · < ص > < ٤ ) + ل ( · < ص > < ٢٤ ) من التماثل ·, ۲۸٦١ ·, ۱۳٣١ ·, ٤١٩٢



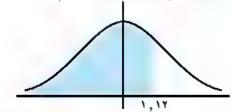












(Y,1>~>·, EA) J ?

 $(\cdot > -\infty)$  +  $(1, 17 > -\infty > -)$  +  $(1, 17 > -\infty)$  1 ·, \1\1 -, o + -, \7\1\1

(١,٦٤ ﴿ ص. ≥ ١,٦٤ ﴿



### 🚰 حاول أن تحل

(٢) إذا كان صم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

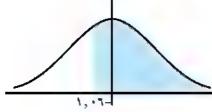
# مثال 🚮

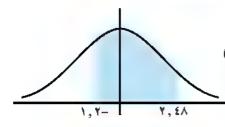
# إذا كان صم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:



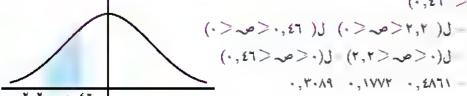


### 🔷 الحل





(· . ٤٦ > ~ > > ٢.٢ ) ( )



### 🚰 حاول أن تحل

(٣) إذا كان صم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

(۲) ار(صہ ≥ ۱۰۶۰)

# التحويل من متقبر طبيعي إلى متقبر طبيعي معياري

(٤) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه لم وانحرافه المعياري O . أوجد:

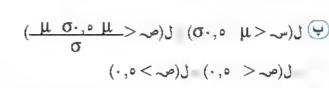
 $(\sigma \setminus 97 + \mu > \sim > \sigma \setminus 97 + \mu) \cup ?$ 

### 🔷 الحل

مثال 贪

$$(1,0 < \infty) \cup (\frac{\mu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu \sigma_{1,0} \mu}{\sigma} < \infty) \cup (\frac{\nu$$

ل ( . < ص < ۱,0 + ۰, ۶۲۲۲ ، ۵ + ۰ ,۰ + ۱,0 > ۰ )



٥,٠٠٨٥ ٠,١٩١٥-٠,٥ (٠,٥> ٥,٠) ١,٠٥٥



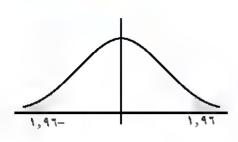
$$U(\frac{\mu \sigma_{1,97} \mu}{\sigma}) \sim \frac{\mu \sigma_{1,97} \mu}{\sigma})$$

$$U(\frac{1}{5},\frac{1}{5}) \sim \frac{\mu \sigma_{1,97} \mu}{\sigma}$$

$$U(\frac{1}{5},\frac{1}{5}) \sim \frac{1}{5}$$

$$U(\frac{1}{5},\frac{1}{5}) \sim \frac{1}{5}$$





- (٤) إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه لم وانحرافه المعياري ٥ . أوجد:
- (σ·, Λ · μ < √) (Ψ)

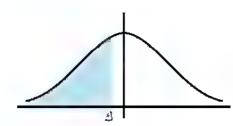
- (or, \ u> ~) ] 1
- $(\sigma \setminus (i \land \mu) \rightarrow (i \land \mu))$

# مثال مثال



أ نلاحظ أن: المساحة < ٠٠٥ ، علامة المتباينة "أكبر من" لذلك فإن ك تقع في الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل المقابل.

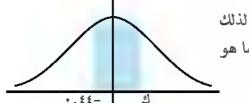
نبحث في جداول المساحات عن العدد (ي) أو أقرب عدد إليه يناظر المساحة ٠,٣٩٤٤ فنجده ١,٢ تحت الفروق



- المساحة < ٥,٠ ، علامة المتباينة "أقل من" لذلك فإن ك تقع في الفترة السالبة كما هو موضح بالشكل المقابل.
  - ٠,١١٥١ =(ك> مى) ا ٠,١١٥١ -

ومن التماثل في المنحني نجد أن : ل (ص > ك) = ١٩١٠.

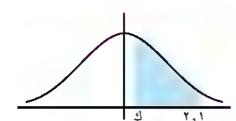




المساحة > ٥,٠ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة السالبة، لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل الجانبي.

- ٠.,٥٥٨٨ (ك > ٠,٤٤) ل ١٠:١
- · , ٥٥٨٨ (ك > م > ) ال (٠ > م > ) يا (٠ > م الله عنه الله على الله عنه الله عنه الله عنه الله عنه الل
- ·, com (1>~>) J + (·, 21>~>) J ...
  - ٠,٥٥٨٨ (٤>٠٥) ١٠٠,١٧٠٠.٠

# € بالحطأين



المساحة < ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة الموجبة، لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة أيضًا كما هوموضح بالشكل الجانبي.

- · , ۲۹۰۱ (۲,۱> ص> الله الله ۲۹۰۲ ...
- ·、ヤタ・フ (シンーン) し(・ハンーン) ::
- ・、ヤタ・フ (ナノ >~) し (ゴ >~) ご こうしょうしょう
- , = 4 ... , \9\0 , \9\7 , \2\1

### 🛂 حاول أن تحل

- (٥) إذا كان صه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة ك في كل من الحالات الآتية :
  - ٠,١٩٨٠. (ك> مه رك) ل (م

ا ل (صہ کا کا رحہ کا کا ر

- ·,ハイドハ (ナ,0>~> 土) 」 (3)
- ・, ٧٩٧・ (シンマン > ۲、٤ ) 」 マ

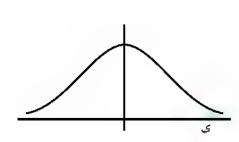
# مثال

# ٦ سـ متغير عشوائي طبيعي متوسطه لله ، انحرافه المعياري σ

- ا وذا کان: ل (س ≥ ۱۸۰) ۲۰۰۰،۰۰۰ م ۱۹۵
  - وذا کان: ل (س < ۲۰۰ (۳۰ کان: ل س
- ع اذا کان: ل (س > ۱۷۰) ۷ م ، ۲۲۸ ، ۷ م فاحسب ۱
- ال اس ح ك المحسب ك ١٠٥ ل ١٠٥ ل ١٠٥ ل ١٠٥ ل المحسب ك
- ه إذا كان: ل (س > ك ) م م م م ه ه م م م م م ه م م م م ه الحسب ك

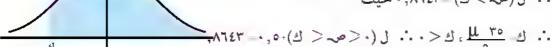
### 🔷 الحل

- $\cdot, \cdots, \cdots, \cdots$   $(\frac{170 + 110}{5})$  (110) (110)
- $\cdot < 0$ ن ل (ص> 2 ) ، > 0 حیث ی > 0 ن ل (ص> 0 ) ن > 0
  - .. ل(٠<مر<ي) ٥,٠٠٦٢ ... ١٩٣٨ ... ١٩٣٨ ...
    - ٠٠ ي ٥٠٠٠



فاحسب ٥

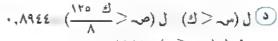
فاحسب لل



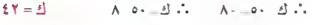
$$\textbf{$\xi$ *, $\bullet = \mu$ ...} \qquad \quad \bullet, \bullet * \texttt{$v$} \bullet = \mu ...$$

$$\cdot, \cdot \text{YYA} \quad \left( \frac{\mu \quad \text{VV}}{v} > \sim \right) \quad \text{J} \quad (\text{VV} > \sim) \quad \text{J} \quad \text{?}$$

 $\tau = \frac{\mu}{\nu} \cdot \nu$ .



# 



### 🚰 حاول أن تحل

ען وانحرافه المعياري وكان لـ (سـ< ١٩) عشوائيًا طبيعيًّا متوسطه لم وانحرافه المعياري وكان لـ (سـ< ١٩) ـ ٠٠,٧٧٣٤. ل (سے < ۱۰) ۱۰۹۳۳ من (1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 - < 1 -



# تمـــاريــن (٥ – ١) 🥙

# (١) إذا كان صم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

$$(\Upsilon, \Upsilon > \sim > 1, \epsilon)$$
  $(\Upsilon, \Upsilon > \sim > 1, \epsilon)$   $(\Upsilon, \Upsilon > \sim > 1, \epsilon)$ 

# 💎 إذا كان صه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة العدد الحقيقي (ك) الذي يحقق :

# 🔻 صــ متغير عشوائي طبيعي معياري ، فإذا كان :

$$(2 > -\infty > 1, \epsilon)$$
 أوجد: ل  $(3 > -\infty > 1, \epsilon)$  أوجد: ل  $(3 > -\infty > 1, \epsilon)$ 

# 🚯 مه متغير عشوائي طبيعي متوسطه 4 وانحرافه المعياري O وكان

# ٥ أجب عن الأسئلة الآتية

راً 'إذا كان سم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ١٢٠ وانحرافه المعياري ١٠ وكان ل(سم < ك) = ٩٩٩٩. فأوجد قيمة ك.

ب إذا كان سه متغيرًا طبيعيًّا متوسطه  $\mu$  وانحرافه المعياری  $\sigma$   $\circ$  فأوجد قيمة  $\mu$  التي تجعل  $\sigma$  إذا كان سه  $\sigma$  متغيرًا طبيعيًّا متوسطه  $\sigma$  وانحرافه المعياری  $\sigma$   $\sigma$  أن اسه  $\sigma$   $\sigma$  أن اسه  $\sigma$  أن السه  ن السه  $\sigma$  أن السه أن السه  $\sigma$  أن السه  $\sigma$  أن السه  $\sigma$  أن السه أن السه  $\sigma$  أن السه أن السه  $\sigma$  أن السه أن السه  $\sigma$  أن السه أن السه أن السه  $\sigma$  أن السه أن السه أن السه أن السه أن السه أن السه أن السه أن السه أن

 $\sigma$  إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه  $\mu$  و انحرافه المعيارى فأوجد ل ( $\sigma + \mu > -\infty > \sigma$ )

- و إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ۱۸ و انحرافه المعيارى ۲٫۵ فأوجد:  $\mathbb{E}[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$   $\mathbb{E}[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$   $\mathbb{E}[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$   $\mathbb{E}[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
- - نازه کان سه متغیرًا عشوائیًّا طبیعیًّا متوسطه  $\mu$  ۱۵ انحرافه المعیاری  $\sigma$  ۰ فأوجد: أو  $\mu$  ؛  $\nu$  ( $\nu$  )  $\nu$  (
  - نان سہ متغیرًا عشوائیًّا طبیعیًّا متوسطه  $\mu$  ۱۷ انحرافه المعیاری  $\sigma$  ۲ فأوجد: أولًا: ل (۱۲ < سہ< ۲۰) ثانیًا: ل (سہ> ۱۵)
    - ن إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه 77، وتباينه 77، فأوجد: أولًا: ل (سه < 77) ثانيًّا: ل (77 < m < 77)
    - ن إذا كان سه متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه لله المحارى  $\sigma$  تأوجد: أو لًا: ل (سه  $\sim$  ۱۰) أو لًا: ل (سه  $\sim$  1) ثانيًا: إذا كان ل (سه > ك) = 0.00 ، فأوجد قيمة ك.

### الوحدة الخامسة

# نعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعي

Y - 0

Some Practical Applications of the Normal Distribution

### المصطلحات الأساسية

سوف تتعلم

تطبيقات عملية التوزيع الطبيعي

0المنحني الطبيعي

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

4التوزيع الطبيعي المعياري

المتغير العشوائي الطبيعي

Standard normal distribution

Normal Random Variable

### مقدمة:

في الدرس السابق تعرفنا على التوزيع الطبيعي وخواصه ،كما تعرفنا على المتغير العشوائي الطبيعي المعياري وكيفية إيجاده من التوزيع الطبيعي بمعلومية المتوسط والانحراف المعياري ، كما تعرفنا على كيفية حساب احتمالات متغير عشوائي له توزيع طبيعي معياري باستخدام الجداول الإحصائية. وفي هذا الدرس سوف نتناول بعض الاستخدامات المختلفة للمتغير العشوائي الطبيعي في دراسة بعض الظواهر التي يعبر عنها.

### مثال الريط بالصناعة



١ ماكينة بأحد المصانع تنتج أسطوانات أطوالها تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سم وانحرافه المعياري ٢ سم، تكون الأسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ سم ٦٠ سم، اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة، فكم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟

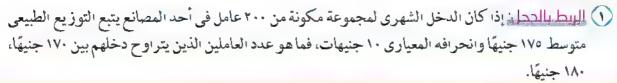


باعتبار أن سم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا يعبر عن طول الأسطوانة

.. احتمال (الأسطوانة مقبولة) ل (٥١ < سـ < ٦٠)

- عدد الأسطوانات المتوقع قبولها ١٠٠٠ × ٩٧١٠ ، ٩٧١ أسطوانة

### 🛂 حاول أن تحل



٥ آلة حاسبة علمية

الأبوات المستخدمة

# مثال 🚮



البيط بالتعليم: إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المدارس هي متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ عدى وانحرافه المعياري σ ، حيث حصل ٢٢,٦٦٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة ، أوجد قيمة σ .

### ♦ الحل

نفرض أن سم متغير عشوائي طبيعي يعبر عن درجات الطلاب.

$$\cdot$$
,  $t$  ( $\frac{22}{\sigma}$   $< \sim$ )  $\downarrow$   $\cdot$ :

$$\Lambda = \frac{\gamma}{\gamma, V_0} = \sigma \leftrightarrow \gamma, V_0 = \frac{\gamma}{\sigma} \leftrightarrow \gamma$$

٠, ٧٥ ٷ ...

### 🚹 حاول أن تحل

إذا كانت درجات الطلاب في أحد الامتحانات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعياري ١٢ ، واختير طالب عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة بين ٦٦، ٧٥ درجة و إذا كان ١٥٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز ، فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز .

# مثال 🚮

السط بالطول: إذا كان أطوال الطلاب في إحدى المدارس الثانوية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ ١٦٠ سم،
 وانحرافه المعياري σ ه سم فأوجد احتمال أن يختلف طول أي طالب عن μ بما لا يزيد عن ٨ سم.

### 🔷 الحل

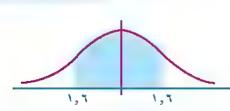
نفرض أن سه متغير عشوائي طبيعي يعبر عن أطوال الطلاب اختلاف الطول عن لل اسه الا "أى الفرق المطلق بين الطول والمتوسط للا"

 $(\wedge > | \text{17. } _{\sim} |) \text{J} \ (\wedge > | \mu \ _{\sim} |) \text{J} \ \dot{\sim}$ 

$$U\left(\frac{13\cdot 134}{\circ} > \sim > \frac{13\cdot 101}{\circ}\right)$$



التعبير: | س- أ | < ب يكافئ: التعبير: - ب < س - أ < ب أى أن: أ - ب < س < أ + ب



### 🚹 حاول أن تحل

السط بالورين إذا كان توزيع أوزان التلاميذ في إحدى المدارس الابتدائية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٢٠ كجم وانحراف معيارى ٥ كجم، احسب النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يزيد أوزانهم عن ٤٥ كجم، وكذلك النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقع أوزانهم بين ٢٠، ٣٠ كجم.

# مثال مثال

- البيط بالعمل: إذا كان توزيع أجور عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه بها ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى ٥ ١٠ فأوجد:
  - النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيها.
  - 💛 النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا.
  - النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠، ٨٠ جنيهًا.



- $(\frac{\text{Vo q.}}{\text{V.}} < \infty) \text{J } (9. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1. < \infty) \text{J } (1.$
- ·· نسبة عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا ٦,٦٨٪
- ·· نسبة عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا ٢,٢٨٪ من العدد الكلى
- · · نسبة عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا ٦٢ , ٢٢ ٪ من العدد الكلى لعمال المصنع

### 🚹 حاول أن تحل

- بفرض أن درجات أحد الامتحانات هي متغير طبيعي بتوقع ٧٦ وانحراف معياري ١٥ درجة و بترتيب الطلاب الأوائل الحاصلين على درجة أعلى من الدرجة  $\alpha$  فكانوا يمثلون ١٥ ٪ من إجمالي الطلاب و بترتيب الطلاب الحاصلين على أقل الدرجات أدنى من الدرجة  $\beta$  وجد أنهم يمثلون ١٠ ٪ من إجمالي الطلاب أوجد :
  - أ أقل درجة α كي يعتبر الطالب من الأوائل.
    - ب درجة الرسوب β.

# تمــارین ۵ – ۲



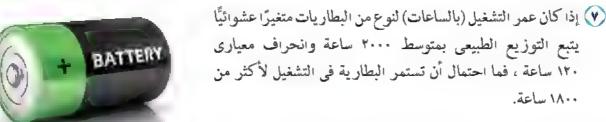
- (١) إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة في إحدى المدن هو متغير عشواتي طبيعي متوسطه ١٧٠ جنيهًا وانحرافه المعياري ٢٠ جنبها اختبرت أسرة عشوائيًّا ،أوجد:
- 🕕 احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ جنيهًا، ٢٠٠ حنيها.
  - 😛 عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهًا .
- 💎 إذا كان أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥, ٦٨ كيلو جرامًا وانحرافه المعياري ٥,٦ كيلو جرامًا.

احسب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٧،٥ كيلو جرامًا ، ٧١ كيلو جرامًا .

👱 إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلو جرامًا.



- 😙 أخذت عينة عشوائية من ٢٠٠ تلميذ من مدرسة . فإذا كانت أعمارهم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ٢٦,٦ وانحرافه المعياري ١,٢ ، أوجد عدد التلاميذ الذين تقل أعمارهم عن ١٦ سنة من تلك العينة.
- إذا كانت أطوال ۲۰۰۰ طالب بإحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ۱۷۰ سم وانحراف معياري ٨ سم فأوجد عدد الطلاب الذين تقل أطوالهم عن ١٧٦ سم .
- (٥) إذا كان الدخل الشهري لـ ٣٠٠ أسرة يمثل متغيرًا عشوائيًّا سـ يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع لل ٥٠٠ جنيه وانحراف معياري ٢٠٥٥ جنيهًا فأوجد
  - أ عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري أكبر من ٥٣٠ جنيهًا.
  - 🗨 الحد الأعلى للدخل لنسبة الـ ٤ ٪ من الأسر التي تحصل على أدني الدخول .
- إذا كان الدخل الشهرى لـ ٢٠٠ أسرة متغيرًا عشوائيًا سم يتبع توزيعًا طبيعيًّا بتوقع للـ . 20 و انحر اف معياري Α جنيها . واختيرت أسرة عشو ائيًّا من هذه الأسر ، فأوجد :
  - 🚺 احتمال أن يكون الدخل الشهري للأسرة أكبر من ٥٠٠ جنيه على الأكثر
    - 💛 عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري ٥٠٠ جنيه على الأكثر.





- (ه) إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ١٨٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٥ جنيهًا فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨ جنيهًا.
- إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر فبراير يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ ٣ سم، وتباينه ٢٥ ٤ سم، فأوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار في شهر فبراير في العام التالي:
  - اً أكبر هن ١ سم ع ع سم ع ع سم الكبر هن ١ سم ع ع سم
- نا إذا كانت درجات الحرارة في شهر أغسطس تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ درجة ، وانحرافه المعياري و اذا كانت درجات ، فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة في يوم ما خلال هذا الشهر:
  - 史 أكبر من ٣٩ درجة .
- 🕕 واقعة بين ٢٨ درجة ، ٢٨ درجة.
- 🕏 واقعة بين ٢٦ درجة ، ٢٢ درجة.
- آ تقدم ۱۰۰۰ شاب إلى إدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ۱۷۰ سم، وانحراف معيارى ۱۰ سم، أوجد عدد الشباب:
  - الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم
  - 👽 غير المقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم
  - (۱۲) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط ٥٠ سم، وانحراف معيارى ٥٥ ، إذا علم أن أطوال ٥٦ ، ١٠ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم، فأوجد التباين لأطوال هذا النبات
  - (۱۳) إذا كانت أوزان الطلبة في إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٥ كيلوجراما، وانحرافه المعياري σ، وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلبة تزيد عن ٧٠ كيلو جرامًا.
    - ا أوجد قيمة σ
  - ي إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن ٦٧,٥ كيلوجرام
- إذا كان أوزان الطلبة في إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرام وانحرافه المعياري ٢٠٥ كيلو جرام :
  - 🕕 احسب النسبة المئوية للطلاب تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرام ، ٧١ كيلو جرام .
  - 🗨 إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلوجرامًا.
- (10) إذا كان درجات الطلاب في إحدى المدارس هي متغير عشوائي طبيعي بمتوسط μ ٢٢ وانحرافه المعياري σ حيث حصل ٢٦,١١٪ من الطلاب على أكثر ٥٠ درجة فأوجد قيمة σ.

- (۱) في امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معياري هي امتحان معادي الطلبة المتقدمين للامتحان ١٠٠ طالب.
- (۱۷) ينتج أحد المصانع أسطوانات أطوالها يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سنتيمترًا وانحرافه المعيارى ٢ سنتيمترا، وتكون الأسطوانات المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١،٠٥ سنتيمترا، أخذت عينة عشوائية من المصوانة . كم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟
- (۱۸) إذا كانت أنصاف أقطار الحلزونات التى تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ٢٥ سم، وانحراف معيارى ٢٠ سم، يعتبر الحلزون معيبًا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم اختير حلزون عشوائيًّا. أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبًا.
  - إذا كانت أوزان مجموعة من حيوانات التجارب تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط  $\mu$  جرام وانحراف معيارى ١٠ جرامات فإذا علمت أن : ل ( س  $\mu$  ١٨٠ ) ١٠٥٧ ، احسب المتوسط  $\mu$  .
  - ندا كانت درجات الطلاب في امتحان ما متغيرًا عشوائيًّا يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه 4 وانحرافه المعياري σ فأوجد:
    - احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من  $(\sigma \mu)$  .
  - $\Psi$  النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين:  $(\sigma + \mu)$  ،  $(\sigma + \mu)$  .
- ۱۰ وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط µ وانحراف معيارى ٤.
   إذا علم أن أطوال ٥٦,٥٦ ٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم ، فأوجد المتوسط µ لهذا النبات .
- (٢٧) إذا كانت درجات الحرارة في شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي ١٦ درجة وانحرافه المعياري ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة في يوم ما خلال هذا الشهر:
  - 🕦 واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة
    - 💛 أكبر من ١٥ درجة .
- المعياري على أحد المجتمعات وجد أن نسب الذكاء تتوزع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي ١٠٤,٦ وانحرافه المعياري ١٠٢٥
  - 🕕 أوجد نسبةالأفراد الذين تقع نسب ذكائهم بين ٩٠، ١٢٠
  - 史 أوجد نسبة الأفراد الذين تزيد نسب ذكائهم عن ١١٠ .

### الوحدة الخامسة

# التقدير الإحصائب وفترات التقة

W - 0

تقدير المتوسط لمجتمع بنقطة
 تقدير المتوسط لمجتمع بفترة ثقة.

### Estimation and confidence intervals.

### سوف تتعلم المصطلحات الأساسية

Normal Distribu	tion	Parameter .	المعلمة (بار امتر)
Critical Value	القيمة الحرجة	Statistics	4 لإحصاء
Estimation	<ul> <li>خطأ في التقدير</li> </ul>	Estimate	<b>۵</b> التقدير
	Error	Point Estimate	🗖 التقدير بنقطة
		Confidence Inte	erval فترة الثقة 🗘
interval Estimati	- 🗘 التقدير بفترة 🗠		t li

مقدمة:

### Parameter Zalaati

قيمة عددية ثابتة تميز المجتمع وغالبا تكون غير معلومة. مثل المتوسط لل ويقدر بمتوسط العينة س

### estimation التقدير

هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة و تعكس قيمة قريبة لمَعْلمة المجتمع ككل و توزيعه ، وله أسلوبين هما :

### (۱) التقدير بنقطة: Point estimate

هى قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير مَعْلمة مجهولة من معالم المجتمع. مثل الوسط الحسابي لعينة عشوائية  $\overline{\mathbf{w}}$ ، و يستخدم لتقدير متوسط للمجتمع  $\mathbf{\mu}$ 

### (۲) التقدير بفترة ثقة: Interval estimation

هو إيجاد فترة معينة يُتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين و هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

عبره المعقل هي فترة تُستخدم في الإحصاء لتقدير قيمة معلمة غير معروفة للمجتمع.

بهسير عبره البهد فترة الثقة بمستوى ٩٥٪ تعنى أنه عند تكرار تجربة بنفس الحجم عدد ١٠٠ مرة فإننا نثق بأن ٩٥ فترة من الفترات المئه يقع تقدير المَعْلمة بداخلها.

### مستوى الثقة المعادة level of confidence

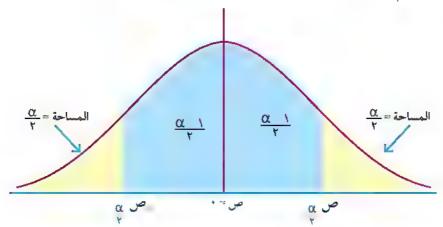
هو احتمال أن تكون فترة الثقة تحوى القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة وقيمة مستوى الثقة تساوى  $(\alpha - 1)$  حيث  $\alpha$  هي نسبة الخطأ في التقدير .

### فمثلاً:

$$\checkmark$$
 إذا كانت  $\alpha$   $\cdot$   $\cdot$  وإن مستوى الثقة  $-$  (  $\alpha$  )  $-$  99٪ إذا كانت

# critical value $\alpha$ ् । তিন্দু । বিশ্বনাথ

لإيجاد القيمة الحرجة ص  $\alpha$  نحسب المساحة  $\frac{\alpha}{\gamma}$  ومن جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعياري نحصل على القيمة ص  $\alpha$ 



# مثال مثال

المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ بإستخدام التوزيع الطبيعي المعياري وجد القيمة الحرجة ص و المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ بإستخدام

### 🔷 الحل

- " مستوى الثقة ٩٥٪
  - ·, 90 0 1 ...
- - $\cdot$  , ٤٧٥ = (  $\alpha$  ص >  $\cdot$  ) ل

# بالكشف عن هذة القيمة في جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري

_											
	٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	۰,۰٥	٠,٠٤	٠,٠٣	-,- ٢	-,-1	•,••	ی
	٠,٤٤٤١	-,5179	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٠٦	- , 279.2	-, 5474	-,277-	-, 2707	.,2720	-,2774	1,0
	-,£0£0	-,£070	+,£070	1,5010	+,£0+0	+,5290	+,E £ A £	+,114	+,5574	+,8107	1,1
	-,٤٦٣٢	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦١٦	-,5	٠,٤٥٩٩	-,5091	٠,٤٥٨٢	·,£0V7	•,£07.5	3002.	٧,٧
	٠,٤٧٠٦	-,£799	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٧١	+,277£	+,£707	+,£7£9	-,5751	۸,۸
4	£16413	(101	212a W		1111	2000	cability	2000	2126.0	P 4 2 6 M	
$\mathbf{A}$	*,4 * * *	-,2111	-,2101	7.4	-,2426	-,2 7 171	-,2-111	7,44,1,1	-,2 * 1 *	-,2111	, , ,

∴ صم ۱٬۹۹

### 🚹 حاول أن تحل

المبيعى الطبيعي المناظرة لمستوى ثقة ٩٩٪ بإستخدام جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعياري

### الخطأفي التقدير Estimation error

عند استخدام عينة لتقدير المتوسط في المجتمع يكون الخطأ في التقدير والذي يرمز له بالرمز هـ

$$\alpha \xrightarrow{\sigma} \frac{\sigma}{\sqrt[3]{4}}$$

 $\dfrac{\alpha}{2} \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{1}}$ عند درجة ثقة ۱  $\alpha$  . يتعين من العلاقة التالية :

حيث ٥ الانحراف المعياري للمجتمع ، حجم العينه ن

Confidence interval for mean population

التقدير بفترة الثقة لمتوسط المجتمع لل

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط لل وتباين ٢٥

فإن لم ∈ ] س هـ، س + هـ[

عند مستوى ثقة ١ م

 $\frac{\alpha}{\sqrt{i}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{i}}$ 

س هو الوسط الحسابي للعينة ، هـ هو الخطأ في التقدير كما يسمى الطرفين س حد، س + هـ بالحدين الأدنى والأعلى لفترة الثقة

### ملاحطه

- (١) عند إيجاد فترة الثقة سنكتفى مستوى الثقة ٩٥٪ و التي تناظرها القيمة الحرجة ص ١,٩٦ (من جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري)
- (٢) في حالة اذا كانت حجم العينة أكبر من ٣٠ ، عير معلومة فإنه يمكن اعتبار أن الانحراف المعياري للمجتمع σ هو الانحراف المعياري للعينة .

### الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط في المجتمع لم

- (۱) نوجد القيمة الحرجة ص  $\alpha$  المناظرة لدرجة ثقة ٩٥٪ و هي ١,٩٦
- (٢) نوجد الخطأ في التقدير هـ  $\frac{\sigma}{\sqrt{1}} \times \omega$  هي الانحراف المعياري للمجتمع ، ن حجم العينة.
  - (٣) نوجد فترة الثقة ] س هـ، س + هـ[

# مثال 🚮



- (٢) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض فإذا كان حجم العينة ٤٩ و الانحراف المعياري لمجتمع الإناث ٥ - ١٢,٥ و المتوسط الحسابي للعينة س ٢٦,٥ ا بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪
  - 🚺 أوجد الخطأ في التقدير
- 🔫 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي ﻠ
  - ح فسر فترة الثقة

🔵 الحل

$$1,97 = \frac{\kappa}{\alpha}$$
 من  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  ،  $\kappa = 0$  .  $\kappa =$ 

### 🔓 حاول أن تحل

- ن أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض فإذا كان حجم العينة 37و الانحراف المعياري لمجتمع الإناث 70 = 7, و المتوسط الحسابي للعينة  $\frac{1}{100}$  الإناث 70 = 7, و المتوسط الحسابي للعينة  $\frac{1}{100}$ 
  - أوجد الخطأ في التقدير
  - 🗨 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي 🗓
    - ح فسر فترة الثقة

# مثال

- عينة حجمها ٤٩ فإذا كان الوسط الحسابي للعينة ٦٠ و تباينها ١٤٤ بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪
  - 1 أوجد الخطأ في التقدير
  - أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي لل
    - ج فسر فترة الثقة

### 🔷 الحل

$$1,97 = \frac{\alpha}{\gamma}$$
 ن  $\frac{\alpha}{\gamma}$ 

### أولاً: أختر الاجابة الصحيحة

1	يته ١١ و الحرافها المعيار:	ودا كان الوسط العسابي للع	🕦 عينة حجمها ن ف
	لعبنة يساوي	يساوي ٢٠٢٠ فإن حجم ا	الخطأ في التقدير
\ <b>a</b>	0.	m ( <del>.)</del>	to 1
اوي ٧٨٤, ٠ فإن الانحراف المعياري	وكان الخطأ في التقدير يس	ا بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪	💎 عينة حجمها ٢٢٥
			للعينة يساوى
kJ (3)	7 (2)	پ ه	<b>70</b> 1
الخطأ في التقدير يساوي ١,٢٥ فإن	ل عینة یساوی ۷٫۲۰ وکان	على لفترة الثقة ٩٥٪ لمتوسع	<ul> <li>إذا كان الحد الأ</li> </ul>
		باوى	متوسط العينة يس
A (3)	v 客	7 😌	ه ۱
		قة لمتوسط عينة هي ]٩,٣	
11 (2)	٧. 🖘	۹ 😛	A (Î)
ف المعياري للعينة يساوى عبمستوى	٩، ٩٨, ٩٨ [ وكان الانحراف	قة لمتوسط عينة هي ]٠٠,	(٥) إذا كانت فترة الثا
			1
٦٤ 🕥	770 ?	٤٩ 😛	r. 1
1 11 11 11 11 11 11			
٩٥٪ و ١٥٥ حجم العينه ١٢٥ والوسط	اوی ۲۳,۰٤ بمستوی ثقة	دنى لفترة الثقة للمتوسط يس	(٦) إذا كان الحد الأ
·			
ساوى	عياري لبيانات هذة العينة ي	دنى لفترة الثقة للمتوسط يس ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ب ٢٦	الحسابي للعينة ي
ساوى  ۲۸ عام الحسابى للعينة	عیاری لبیانات هذه العینه یه (ج) ۲۷ جیساوی ۳۱٬۹۶ بمستوی ث	ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ٢٦ على لفترة الثقة لمتوسط عينة	الحسابي للعينة يه ٢٥ (أ) ٢٥ (أ)
ساوى  ۲۸ عام الحسابى للعينة	عیاری لبیانات هذه العینه یه (ج) ۲۷ جیساوی ۳۱٬۹۶ بمستوی ث	ساوي ٢٥ فإن الانحراف الم ب ٢٦	الحسابي للعينة يه ٢٥ (أ) ٢٥ (أ)
ساوى  ۲۸ عام الحسابى للعينة	عیاری لبیانات هذة العینة یه (ج) ۲۷ قیساوی ۳۱٬۹۳ بمستوی ث ن حجم العینة یساوی	ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ٢٦ على لفترة الثقة لمتوسط عينة	الحسابي للعينة يه ٢٥ ( ) ٢٥ ( ) و ٢٥ ( ) و الأد كان الحد الأد يساوى ٣٠ و الان
ساوى  ۲۸   وكان الوسط الحسابى للعينة  مد ٩٥٪ وكان الوسط عدما الحسابى العينة	عيارى لبيانات هذة العينة يه الحينة يه الحينة يه المستوى ثه حجم العينة يساوى المستوى شي حجمها ٣٦ يحقق المتباينة:	ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ٢٦ على لفترة الثقة لمتوسط عينا حراف المعيارى للعينة ٧ فإر ٣٦ ب	الحسابى للعينة يه الحسابى للعينة يه الحسابى الحد الأنه الحد الأنه يساوى ٣٠ و الانه أنه الحد أنه متوسط م
ساوى  ٢٨ عند ١٩٥٪ وكان الوسط الحسابي للعينة	عيارى لبيانات هذة العينة يه الحينة يه الحينة يه المستوى ثه حجم العينة يساوى المستوى شي حجمها ٣٦ يحقق المتباينة:	ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ٢٦ على لفترة الثقة لمتوسط عينا حراف المعيارى للعينة ٧ فإر ٣٦ ب	الحسابى للعينة يه الحسابى للعينة يه الحسابى الحد الأنه الحد الأنه يساوى ٣٠ و الانه أنه الحد أنه متوسط م
ساوى  ۲۸   وكان الوسط الحسابى للعينة  مد ٩٥٪ وكان الوسط عدما الحسابى العينة	عيارى لبيانات هذة العينة يه الحينة يه الحينة يه المستوى ثه حجم العينة يساوى المستوى شي حجمها ٣٦ يحقق المتباينة:	ساوى ٢٥ فإن الانحراف الم ٢٦ على لفترة الثقة لمتوسط عينا حراف المعيارى للعينة ٧ فإر ٣٦ ب	الحسابى للعينة يه الحسابى للعينة يه الحسابى الحد الأنه الحد الأنه يساوى ٣٠ و الانه أنه الحد أنه متوسط م

(• إذا تم حساب ٩٥٪ فترة الثقة لمتوسط عينة من ١٠٠ شخص فكانت (٥٠ ± ٢) كيلوجرام، فإن حجم العينة المتوقع إذا أردنا تقليل نسبة الخطأ إلى ١ كيلوجرام مع الاحتفاظ بنفس مستوى الثقة يساوى عدد أ

# ثانياً: أجب عما يلى:

- لديك عينة من ٥٠ طالباً في جامعة، وقد حصلوا على درجات في اختبار معين. متوسط الدرجات في العينة هو
   ٧٥ والانحراف المعياري هو ١٠. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط الدرجات في المجتمع
- تم أخذ عينة من ١٠٠ موظفًا، ووجد أن متوسط ساعات العمل الأسبوعية هو ٢٨ ساعة والانحراف المعياري هو ٤ ساعات. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط ساعات العمل الأسبوعية.
- تم أخذ عينة من ٤٩ طالب، ووجد أن متوسط درجاتهم هو ٧٢ والانحراف المعياري هو ٦. احسب فترة الثقة
   بنسبة ٩٥٪ لمتوسط درجات الطلاب.
- (ع) تم أخذ عينة من ١٠٠ زبون، ووجد أن متوسط قيمة الفاتورة هو ٢٥٠ جنيه والانحراف المعياري هو ٢٠ جنيه. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط قيمة الفاتورة.
- ( متوسط مدة النوم في عينة من ٤٠٠ شخص هو ٧,٢ ساعة والانحراف المعياري هو ١,١ ساعة. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لعدد ساعات النوم.
- تم أخذ عينة من ١٥ شركة، ووجد أن متوسط الأرباح السنوية هو ٢٥٠٠٠٠ جنيهًا والإنحراف المعياري هو
   ٢٠٠٠ جنيهًا . احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط الأرباح السنوية.

124

# جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

٥	_		-			u u				
٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	+,+0	٠,٠٤	۰,۰۳	*,* *	٠,٠١	*,**	ی
-,-۲09	.,. 419	-,- ۲۷۹	-,- ٢٣٩	-,-199	.,.17.	-,-14-	-,	٠,٠٠٤٠	*,****	*,*
·,·VoY	٠,٠٧١٤	-,-7٧٥	-,-747	-,-097	•,•00V	-,-01V	٠,٠٤٧٨	٠,٠٤٣٨	-,-۲۹۸	*,1
.1121	-,11-5	٠,١٠٦٤	+,1+۲٦	·,·4AV	٠,٠٩٤٨		٠,٠٨٧١	+,+AYY	·,·V٩٢	٠,٢
-,1017	٠,١٤٨٠	.,1227	-,12-7	٠,١٣٦٨	-,1771	.,1797	-,1700	-,1717	-,1179	٠,٣
-,1879	.,182	+,1A+A	-,1777	•,1777	-,17	.,177£	-,1744	.,1091	-,100£	٠,٤
3777.	.,417.	-,7107	٠,٢١٢٢	۸۸۰۲,۰	٠,٢٠٥٤	-,7-19	1940	.,190.	-,1910	٠,٥
٠,٢٥٤٩	٧١٥٧,-	·,Y£A7	•,7505	٠,٧٤٢٢	٠,٢٢٨٩	۰,۲۲۰۷	3777	-,4491	-,7709	٠,٦
٠,٢٨٥٢	-, ۲۸۲۴	-,4748	٠,٢٧٦٤	.,4745	3.YY, £	-,٢٦٧٢	٠,٢٦٤٢	-,4711	-, ۲۵۸-	٠,٧
•,٣١٣٣	۲۰۱۳,-	٠,٣٠٧٨	-,5-01	-,5-45	-, 4990	·,۲٩٦٧	-, 4979	-,491-	YAA1	٠,٨
-,٣٣٨٩	-,4410	-,446-	-,4410	۰,۳۲۸۹	•,٣٢٦٤	-,٣٢٣٨	-,4414	۲۸۱۳,۰	-,٣١٥٩	٠,٩
-,577	-,4099	-,4044	٠,٣٥٥٤	-,7071	-,40-4	۰,٣٤٨٥	٠,٣٤٦١	-,٣٤٣٨	٠,٣٤١٢	1,+
٠,٢٨٢٠	٠.٣٨١٥	-,474.	-,444-	٠,٣٧٤٩	·, ٣٧٢٩	٠,٣٧٠٨	-,4787	-,7770	-, ٣٦٤٣	1,1
.,£-10	.,٣٩٩٧	-,۲۹۸۰	•,٣٩٦٢	.,٣٩٤٤	-, 4940	-,٣٩-٧	-, 4777	٠,٣٨٦٩	1,4824	1,7
·,£1VV	., 2174	·, £1 £V	.,8141	٠,٤١١٥	٠,٤-٩٩	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٦٦	-,2-29	٠,٤٠٣٢	1,5
8719	٠,٤٣٠٦	-, 2797	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٦٥	.,2701	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٩٢	1, £
1333,.	-, £ £ ₹ 9	-,8811	٠,٤٤٠٦	-,579.5	•,574	٠,٤٣٧٠	·,£70V	.,£750	٠,٤٣٣٢	1,0
•,£0£0	.,£070	٠,٤٥٢٥	.,2010	٠,٤٥٠٥	., £ £ 9.0	3 1 3 3 . •	3733,	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٥٢	1,7
-,٤٦٣٣	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٠٨	.,5099	.,8091	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٧٢	٠,٤٥٦٤	-,٤٥٥٤	١,٧
۰,٤٧٠٦	-,£799	٠,٤٦٩٢	-,٤٦٨٦	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٤١	٧,٨
٠,٤٧٦٧	٠,٤٧٦١	۰,٤٧٥٦	٠,٤٧٥٠	.,5755	٠,٤٧٢٨	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧١٩	-, 2714	1,9
٠,٤٨١٧	+, £114	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨٠٢	۰,٤٧٩٨	., 8794	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٨٣	۰,٤٧٧٨	٠,٤٧٧٢	۲,٠
٧٥٨٤.٠	٠.٤٨٥٤	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٤٦	+,EAEY	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٢٠	۰,٤٨٢٦	-,£AY1	۲,١
٠,٤٨٩٠	٧,٤٨٨٧	٠,٤٨٨٤	+, £٨٨١	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦١	۲,۲
٠,٤٩١٦	٠,٤٩١٣	+, £911	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٤	1,59-1	٠,٤٨٩٨	۰,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٢	۲,۳
٠,٤٩٣٦	1, 2942	-, £944	٠,٤٩٣١	., £9.49	٠,٤٩٢٧	.,£940	-, £977	٠,٤٩٢٠	·,£91A	۲,٤
٠,٤٩٥٢	1,5901	+, £9 £9	+, £9 EA	•. £9.67	•, £9.50	٠,٤٩٤٢	1383,-	., ٤٩٤.	-, ٤٩٣٨	۲,0
., £97£	1,5977	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٠	., £909	٧٥٤٤.٠	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٥	., 1907	۲,٦
·,£9V£	٠,٤٩٧٣	+,£9VY	٠,٤٩٧١	1,E9V-	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٦٨	-, £97V	٠,٤٩٦٦	+, £970	۲,۷
٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٧٩	۰,٤٩٧٩	۰,٤٩٧٨	۰,٤٩٧٧	۰,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٦	۰٫٤٩٧٥	٠,٤٩٧٤	۲,۸
٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٥	1,59.00	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	-, £9.٨\	۲,9
., ٤٩٩.	.,£99.	٠,٤٩٨٩	+, £9.89	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٨	۸۸۶۵,۰	۰,٤٩٨٧	+,£9AV	+,£9AV	٣,٠
£994	-, £994	-,	., £994	-, £994	•, £994	£991	., ٤٩٩١	.,£991	-, 299.	۳,١
., £990	-,£990	-, £990	., £99£	., ٤٩٩٤	-, £99£	., £99£	., £99£	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٣,٢
·,£99V	٠,٤٩٩٦	-,	-, 2997	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	.,£990	.,£990	., £990	٣,٣
., £99A	·,£99V	·, £99V	·, £99V	·,£99V	·,£99V	·,£99V	·, £99V	·,£99V	·, £99V	٣, ٤
·,£99A	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	-,899A	·,£99A	٠,٤٩٩٨	·,£99A	٠,٤٩٩٨	-, £99A	٣,٥